

ĐỀ CHÍNH THỨC

I. TRẢ LỜI NGẮN (Viết đáp số của bài toán, không trình bày lời giải)

**Câu 1 (0,5 điểm).** Cho  $n \geq 0$ . Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{1}{1 + \sqrt{n+1} + \sqrt{n}} + \frac{1}{1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$$

**Câu 2 (0,5 điểm).** Biết phương trình  $x^2 + bx + c = 0$  (ẩn  $x$ ) có hai nghiệm  $x_1 = \sqrt{6} + 2$  và  $x_2 = \sqrt{6} - 2$ . Tính giá trị biểu thức  $M = b^2 - 4c$ .

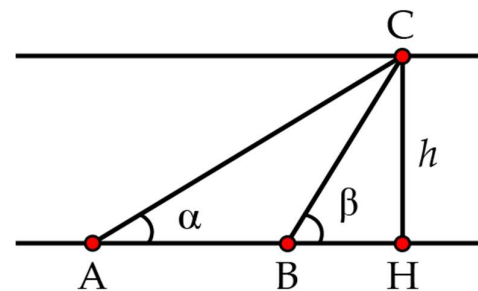
**Câu 3 (0,5 điểm).** Cho  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + \sqrt{3}y = \sqrt{3} \\ \sqrt{3}x + y = -3 \end{cases}$$

Tính  $E = x_0^2 + y_0^2$ .

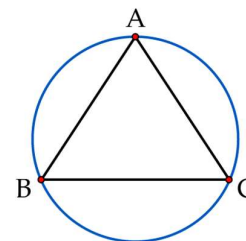
**Câu 4 (0,5 điểm).** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , đường thẳng  $d: y = -x + 4$  cắt parabol  $(P): y = x^2$  tại hai điểm  $A$  và  $B$ . Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  và  $B$  trên trục  $Oy$ . Tính  $OH \cdot OK$ .

**Câu 5 (0,5 điểm).** Hai ô tô cùng khởi hành từ  $A$ , đi đến  $B$ , trên cùng quãng đường dài 150km. Vận tốc của xe thứ nhất hơn vận tốc của xe thứ hai là 10 km/h. Xe thứ nhất đến  $B$  sớm hơn xe thứ hai 30 phút. Tính vận tốc của xe thứ hai.

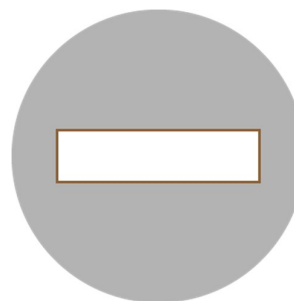
**Câu 6 (0,5 điểm).** Để đo độ rộng của một khúc sông, bạn Nam đi dọc bờ sông từ vị trí  $A$  đến vị trí  $B$  cách nhau một khoảng  $d$  và tiến hành đo đạc góc nghiêng  $\alpha, \beta$  so với bờ sông từ các vị trí  $A, B$  đến vị trí  $C$  bên bờ sông đối diện (Hình bên). Biết  $d = 50$  m,  $\alpha = 27^\circ$  và  $\beta = 45^\circ$ . Tính độ rộng  $h$  của khúc sông (làm tròn đến mét).



**Câu 7 (0,5 điểm).** Từ một miếng tôn hình tròn, bạn Nam cắt ra được một vật nhọn hình tam giác cân ABC có  $AB = AC = 15$  cm và  $BC = 18$  cm (hình bên). Tính bán kính của miếng tôn.



**Câu 8 (0,5 điểm).** Một biển báo giao thông có dạng hình tròn, đường kính 70 cm, được sơn một mặt bởi hai màu đỏ và trắng (phần tô đậm sơn màu đỏ, phần còn lại sơn màu trắng) (Hình bên). Phần được sơn màu trắng là một hình chữ nhật có các kích thước là 10cm và 50 cm. Biết rằng, để sơn 1 m<sup>2</sup> màu đỏ cần chi phí 250 000 đồng, để sơn 1 m<sup>2</sup> màu trắng cần chi phí là 200 000 đồng. Hỏi số tiền (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng) để sơn toàn bộ biển báo trên bằng bao nhiêu? Cho  $\pi = 3,14$ .



## II. TỰ LUẬN (trình bày chi tiết lời giải)

**Câu 9 (2,0 điểm).** Cho  $a > b > 0$ . Xét biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a - b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Biết  $(a - 1)(b - 1) + 2\sqrt{ab} = 1$ , hãy tính giá trị của biểu thức P.

**Câu 10 (3,0 điểm).** Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Qua trung điểm C của đoạn thẳng OB kẻ đường thẳng  $d$  vuông góc với AB. Điểm M thay đổi trên đường tròn (O) sao cho  $MA < MB$ . Đường thẳng  $d$  cắt các đường thẳng MA, MB lần lượt tại K và H. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AH với đường tròn (O).

a) Chứng minh đường thẳng AH vuông góc với BK và ba điểm K, N, B thẳng hàng.

b) Tính tích CH.CK theo R.

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHK luôn thuộc một đường thẳng cố định.

**Câu 11 (3,0 điểm).**

a) Cho  $x > 0, y > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$ .

b) Tìm các số thực  $x, y$  thỏa mãn:  $\frac{x^2 - 4}{y} + \frac{y^2 - 4}{x} + 8 = 4(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1})$ .

### HƯỚNG DẪN GIẢI

#### I. TRẢ LỜI NGẮN (Viết đáp số của bài toán, không trình bày lời giải)

Câu	1	2	3	4
Đáp án	P = 1	M = 16	E = 21	OH.OK = 16

Câu	5	6	7	8
Đáp án	50 km/h	$h = 52\text{m}$	$R = \frac{75}{8} = 9,375$ (cm)	94 000 đồng

#### I. TỰ LUẬN (trình bày chi tiết lời giải)

**Câu 9 (2,0 điểm).** Cho  $a > b > 0$ . Xét biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a - b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Biết  $(a - 1)(b - 1) + 2\sqrt{ab} = 1$ , hãy tính giá trị của biểu thức P.

*Hướng dẫn*

a) Với  $a > b > 0$ :

$$P = \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a - b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

$$P = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a - b} - \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b} + \frac{b(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$$

$$P = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b} - a\sqrt{a} + a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a - b}$$

$$P = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{a - b}$$

b) Từ  $(a - 1)(b - 1) + 2\sqrt{ab} = 1$

$$ab - (a + b) + 1 + 2\sqrt{ab} = 1$$

$$ab = a - 2\sqrt{ab} + b$$

$$ab = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

$$\text{Vì } a > b > 0 \text{ nên } \sqrt{ab} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

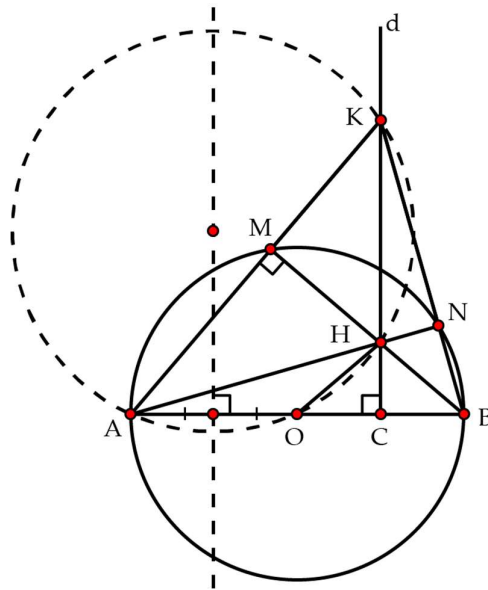
Khi đó, ta có

$$P = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{a-b} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{ab} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{ab}}{a-b} = \frac{\sqrt{ab} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a-b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = 1.$$

**Câu 10 (3,0 điểm).** Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Qua trung điểm  $C$  của đoạn thẳng  $OB$  kẻ đường thẳng  $d$  vuông góc với  $AB$ . Điểm  $M$  thay đổi trên đường tròn  $(O)$  sao cho  $MA < MB$ . Đường thẳng  $d$  cắt các đường thẳng  $MA$ ,  $MB$  lần lượt tại  $K$  và  $H$ . Gọi  $N$  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  $AH$  với đường tròn  $(O)$ .

- Chứng minh đường thẳng  $AH$  vuông góc với  $BK$  và ba điểm  $K, N, B$  thẳng hàng.
- Tính tích  $CH \cdot CK$  theo  $R$ .
- Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AHK$  luôn thuộc một đường thẳng cố định.

*Hướng dẫn*



- Xét  $\triangle AKB$  có hai đường cao  $KC$  và  $BM$  cắt nhau tại  $H$   
Suy ra  $H$  là trực tâm của  $\triangle AKB$ . Do đó  $AN \perp KB$  hay  $AH \perp KB$  (1)  
Ta có  $\widehat{ANB} = 90^\circ$  nên  $AN \perp KB$  (2)  
Từ (1) và (2) suy ra  $K, N, B$  thẳng hàng.

b) Xét  $\triangle ACK$  và  $\triangle HCB$  có: 
$$\begin{cases} \widehat{ACK} = \widehat{HCB} \\ \widehat{KAC} = \widehat{CHB} \text{ (cùng phụ } \widehat{HBC}) \end{cases}$$

Suy ra  $\triangle ACK \sim \triangle HCB$  (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{AC}{HC} = \frac{CK}{CB}. \text{ Suy ra } CH \cdot CK = AC \cdot CB = \frac{3}{2}R \cdot \frac{1}{2}R = \frac{3}{4}R^2.$$

c) Chứng minh được  $AMHC$  là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{MAC} + \widehat{MHC} = 180^\circ$

Lại có:  $\widehat{OHC} = \widehat{MHK}$ . Suy ra  $\widehat{MAC} + \widehat{KHO} = 180^\circ$

Suy ra tứ giác  $AKHC$  là tứ giác nội tiếp.

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AHK$  đi qua  $O$ .

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AHK$  thuộc trung trực của  $OA$  cố định.

### Câu 11 (3,0 điểm).

a) Cho  $x > 0, y > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$ .

b) Tìm các số thực  $x, y$  thỏa mãn:  $\frac{x^2 - 4}{y} + \frac{y^2 - 4}{x} + 8 = 4(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1})$ .

### Hướng dẫn

a) Ta có:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$$

$$\frac{x^3 + y^3}{xy} \geq x + y$$

$$x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) \geq 0$$

$$(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$(x + y)(x - y)^2 \geq 0$$

(luôn đúng với  $x > 0, y > 0$ ).

b) Điều kiện:  $x \geq 1; y \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4}{y} + \frac{y^2 - 4}{x} + 8 &= \left( \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \right) + \frac{4(y-1)}{y} + \frac{4(x-1)}{x} \\ &\geq x + y + \frac{4(y-1)}{y} + \frac{4(x-1)}{x} \quad (\text{Theo câu a}) \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cô – si có:

$$x + \frac{4(x-1)}{x} + y + \frac{4(y-1)}{y} \geq 4(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1})$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = y = 2$  (tm)

Vậy  $(x; y) = (2; 2)$ .