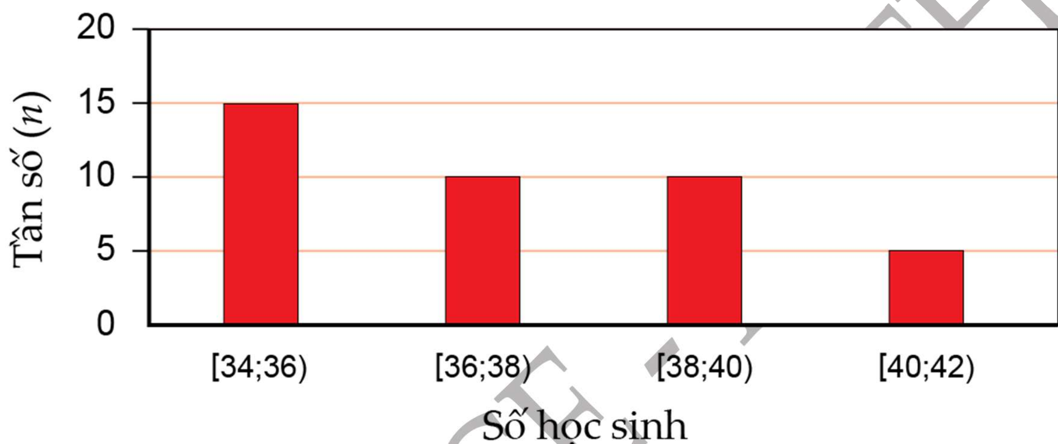
ĐÁP ÁN KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018

Thời gian làm bài: 120 phút

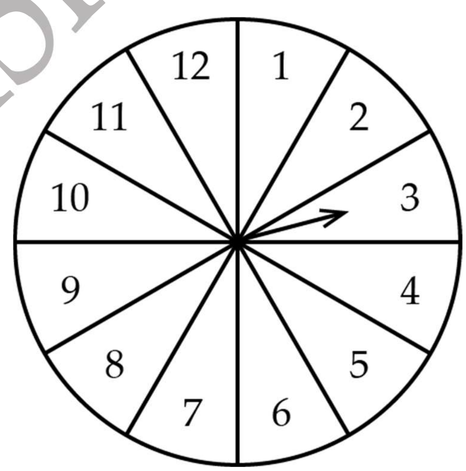
Bài I. (1, 5 điểm)

1) Sau khi điều tra số học sinh trong 40 lớp học (đơn vị: học sinh), người ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dưới đây:



Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [40; 42).

2) Hình vẽ dưới đây mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm 12 phần bằng nhau và ghi các số 1, 2, 3, …, 11, 12; chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa.



Xét phép thử "Quay đĩa tròn một lần" và biến cố M : "Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số chia hết cho 4". Tính xác suất của biến cố M .

Hướng dẫn

1) Tần số ghép nhóm của nhóm [40; 42) là 5.

Tần số ghép nhóm tương đối của nhóm [40;42) là:

$$\frac{5}{15+10+10+5}.100\% = \frac{5}{40}.100\% = 12,5\%$$

2) Xét biến cố M : "Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số chia hết cho 4".

Các kết quả thuận lợi cho biến cố M là: $M = \{4;\ 8;\ 12\}$

Số kết quả thuận lợi của biến cố M là: $n(M) = 3$

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 12$

Vậy xác suất của biến cố M là $P(M) = \dfrac{n(M)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{12} = 0,25$

Bài II. (1,5 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}}$ và $B = \dfrac{3}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{2\sqrt{x}+3}{4-x}$ với $x > 0; x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh $B = \dfrac{\sqrt{x}+3}{x-4}$

3) Xét biểu thức $P = A.B$. Chứng minh $P < P^2$

Hướng dẫn:

1) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{x-4}{\sqrt{x}} = \frac{9-4}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

Vậy với $x = 9$ thì $A = \dfrac{5}{3}$.

2) $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}+3}{4-x}=\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+3}{x-4}=\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$=\dfrac{3\left(\sqrt{x}+2\right)-\left(2\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{3\sqrt{x}+6-2\sqrt{x}-3}{x-4}=\dfrac{\sqrt{x}+3}{x-4}$ (đpcm).

3) Với $x>0;x\neq 4$ ta có:

$P=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}}.\dfrac{\sqrt{x}+3}{x-4}=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$

Vì $x>0$ nên $\sqrt{x}>0$

Suy ra, $\sqrt{x}+3>\sqrt{x},\forall x>0$.

Suy ra, $\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}>1$ hay $P-1>0$

Mà $\mathrm{P}=\dfrac{\sqrt{\mathrm{x}}+3}{\sqrt{\mathrm{x}}}>0$

Suy ra, $P.(P-1)>0$ nên $P<P^2$ với mọi $x>0;x\neq 4$.

Bài III. ***(2,5 điểm)***

1) Bác Tiến chia số tiền 400 triệu đồng của mình cho hai khoản đầu tư. Sau một năm, tổng số tiền lãi thu được là 27 triệu đồng. Lãi suất cho khoản đầu tư thứ nhất là 6%/năm và khoản đầu tư thứ hai là 8%/năm. Tính số tiền bác Tiến đầu tư cho mỗi khoản.

2) Một tổ sản xuất có kế hoạch làm 300 sản phẩm cùng loại trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày tổ đã làm được nhiều hơn 10 sản phẩm so với số sản phẩm dự định làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn kế hoạch 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu sản phẩm? (Giả định rằng số sản phẩm mà tổ đó làm được trong một ngày là bằng nhau).

3) Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 - 3x + a = 0$ có một nghiệm là $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Tìm tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên.

Hướng dẫn:

1) Gọi số tiền bác Tiến đầu tư cho khoản đầu tư thứ nhất và khoản đầu tư thứ hai lần lượt là x, y (triệu đồng) ($x > 0$, $y > 0$).

Do tổng số tiền cho hai khoản đầu tư là 400 triệu đồng nên ta có phương trình: $x + y = 400$ (1)

Ta có:

Lãi suất cho khoản đầu tư thứ nhất là 6%/ năm nên sau một năm, số tiền lãi bác Tiến thu được ở khoản đầu tư thứ nhất là: $6\%.x = 0,06x$ (triệu đồng).

Lãi suất cho khoản đầu tư thứ hai là 8%/ năm nên sau một năm, số tiền lãi bác Tiến thu được ở khoản đầu tư thứ hai là: $8\%.y = 0,08y$ (triệu đồng).

Theo bài ra ta có tổng số tiền lãi thu được là 27 triệu đồng nên ta có phương trình: $0,06x + 0,08y = 27$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $(I)\begin{cases} x + y = 400 \\ 0,06x + 0,08y = 27 \end{cases}$

Giải hệ (I):

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ 0,06x + 0,08y = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 400 - y \\ 0,06\left(400 - y\right) + 0,08y = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 400 - y \\ 0,02y = 3 \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 250 \\ y = 150 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy số tiền bác Tiến đầu tư cho khoản đầu tư thứ nhất là 250 triệu đồng,

Số tiền bác Tiến đầu tư cho khoản đầu tư thứ hai là 150 triệu đồng.

2) Gọi số sản phẩm mỗi ngày tổ sản xuất phải làm theo kế hoạch là x (sản phẩm)

Thực tế, số sản phẩm mà tổ sản xuất làm được trong một ngày là $x+10$ (sản phẩm) ($x>10$)

Số ngày mà tổ sản xuất làm xong công việc theo kế hoạch là: $\dfrac{300}{x}$ (ngày)

Số ngày mà tổ sản xuất làm xong công việc trong thực tế là $\dfrac{300}{x+10}$ (ngày)

Vì tổ sản xuất hoàn thành công việc sớm hơn kế hoạch 1 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{300}{x}-\frac{300}{x+10}=1$$

$$\frac{300\left(x+10\right)-300x}{x\left(x+10\right)}=\frac{x\left(x+10\right)}{x\left(x+10\right)}$$

$$300x+3000-300x=x^2+10x$$

$$x^2+10x-3000=0$$

$$x^2-50x+60x-3000=0$$

$$x\left(x-50\right)+60\left(x-50\right)=0$$

$$\left(x-50\right)\left(x+60\right)=0$$

Suy ra $x=50$ (thoả mãn điều kiện) hoặc $x=-60$ (không thoả mãn điều kiện)

Vậy mỗi ngày theo kế hoạch tổ sản xuất phải làm 50 sản phẩm.

3) Do $x^2-3x+a=0$ có một nghiệm là $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ nên thay $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ vào phương trình ta được:

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) + a = 0$$

$$\frac{14-6\sqrt{5}}{4} - \frac{9-\sqrt{5}}{2} + a = 0$$

$$\frac{7-3\sqrt{5}}{2} - \frac{9-3\sqrt{5}}{2} + a = 0$$

$$-1 + a = 0 \text{ hay } a = 1$$

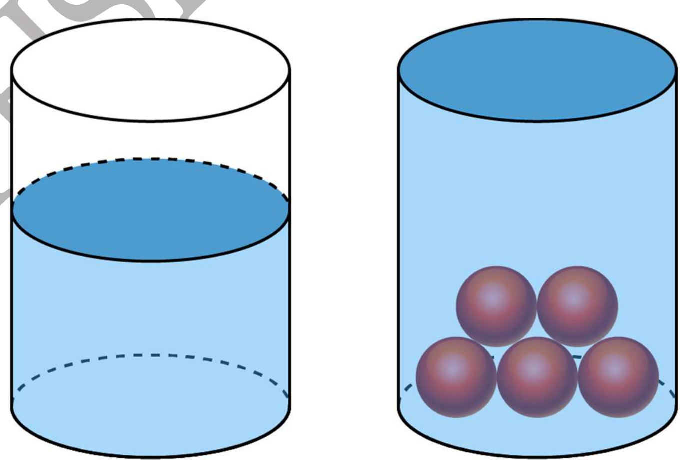
Suy ra phương trình là $x^2 - 3x + 1 = 0$

Theo định lý Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1.x_2 = 1 \end{cases}$

Suy ra tổng bình phương hai nghiệm của phương trình là $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = \left(x \ + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 3^2 - 2.1 = 9 - 2 = 7$.

Bài IV. ***(4, 0 điểm)***

1) Một ly nước dạng hình trụ có chiều cao là 15cm, đường kính đáy là 5cm, lượng nước tinh khiết trong ly cao 10cm. Ly nước được đặt cố định trên mặt bàn bằng phẳng như hình vẽ dưới đây.



a) Tính thể tích lượng nước tinh khiết được chứa trong ly.

b) Người ta thả vào ly nước 5 viên bi hình cầu giống hệt nhau, có cùng thể tích, đồng chất và ngập hoàn toàn trong nước, làm nước trong ly dâng lên đúng bằng miệng ly, không tràn ra ngoài. Hỏi thể tích của mỗi viên bi là bao nhiêu xăng-ti-mét khối? (Giả sử độ dày của ly là không đáng kể).

2) Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và MN vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia MA lấy điểm C khác điểm M. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ điểm M đến đường thẳng BC.

a) Chứng minh bốn điểm O, M, H, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Hai đường thẳng MB và OH cắt nhau tại E. Chứng minh $\widehat{MHO} = \widehat{MNA}$ và $ME.MH = BE.HC$.

c) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC. Chứng minh ba điểm C, P, E là ba điểm thẳng hàng.

Hướng dẫn

1)

a) Gọi chiều cao của ly là $h_1 = 15\text{cm}$; chiều cao của lượng nước tinh khiết là $h_2 = 10\text{cm}$

Bán kính của đáy của ly nước là:

$R = 5 : 2 = 2,5cm$

Thể tích lượng nước tinh khiết được chứa trong ly là:

$V_2 = \pi R^2 h_2 = \pi.2,5^2.10 = 62,5\pi \ (\text{cm}^3)$

b) Thể tích của ly nước là:

$V_1 = \pi R^2 h_1 = \pi.2,5^2.15 = 93,75\pi \ (\text{cm}^3)$

Thể tích lượng nước dâng lên là:

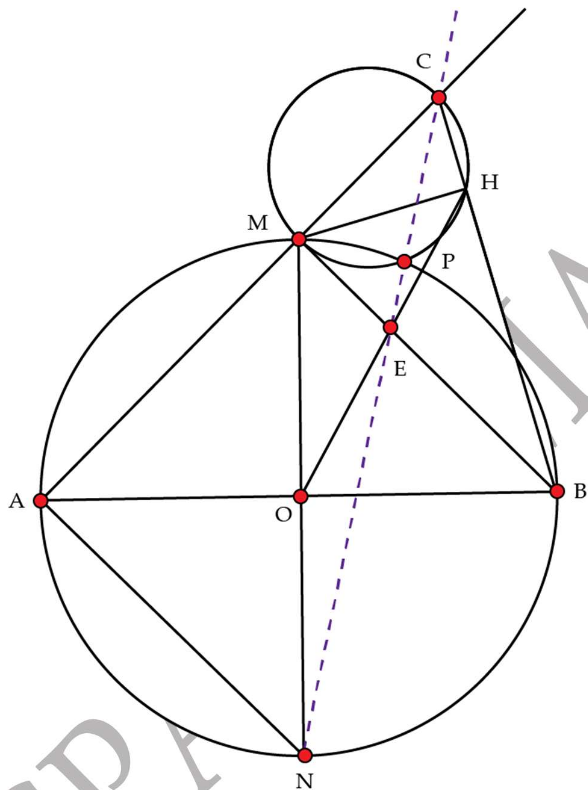
$V = V_1 - V_2 = 93,75\pi - 62,5\pi = 31,25\pi \ (\text{cm}^3)$

Thể tích lượng nước dâng lên chính là thể tích của 5 viên bi.

Suy ra thể tích của 5 viên bi là $31,25\pi\ (\text{cm}^3)$

Vậy thể tích của một viên bi là $31,25\pi : 5 = 6,25\pi\ (\text{cm}^3)$

2)



a) Ta có $MH \perp BC$ (gt)

Suy ra, $\widehat{MHB} = 90^0$. Suy ra, ΔMHB vuông tại H

Suy ra, ΔMHB nội tiếp đường tròn có tâm là trung điểm cạnh MB

Suy ra ba điểm M, H, B thuộc đường tròn có tâm là trung điểm cạnh MB (1)

Lại có $AB \perp MN$ (gt)

Suy ra, $\widehat{MOB} = 90^0$. Suy ra, ΔMOB vuông tại O

Suy ra ΔMOB nội tiếp đường tròn có tâm là trung điểm cạnh MB

Suy ra ba điểm M, O, B thuộc đường tròn có tâm là trung điểm cạnh MB (2)

Từ (1) và (2) suy ra, bốn điểm O, M, H, B cùng thuộc một đường tròn có tâm là trung điểm cạnh MB.

b) Vì bốn điểm O, M, H, B cùng thuộc một đường tròn có tâm là trung điểm cạnh MB

Suy ra, tứ giác $MOHB$ nội tiếp

Suy ra, $\widehat{MHO} = \widehat{MBO}$ (cùng chắn cung OM)

Lại có, $\widehat{MBO} = \widehat{MBA} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MA} = \widehat{MNA}$ (góc nội tiếp chắn cung MA)

Suy ra, $\widehat{MHO} = \widehat{MNA}$ (đpcm)

ΔOMB vuông cân tại O nên $\widehat{OBM} = \widehat{OMB}$ (3)

Mà tứ giác $MOHB$ nội tiếp nên $\widehat{OBM} = \widehat{OHM}$ (cùng chắn cung OM)

và $\widehat{OMB} = \widehat{OHB}$ (cùng chắn cung OB) (4)

Từ (3) và (4) suy ra, $\widehat{MHO} = \widehat{OHB}$

Suy ra, HO là phân giác của $\widehat{MHB}$

Suy ra, $\frac{EM}{EB} = \frac{MH}{HB}$ (tính chất đường phân giác HE trong ΔMHB) (5)

Ta có ΔBMA nội tiếp đường tròn tâm O nhận AB là đường kính nên ΔBMA vuông tại M. Suy ra $BM \perp AC$

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔBMC vuông tại M có:

$HM^2 = HB.HC$. Suy ra, $\frac{HM}{HB} = \frac{HC}{HM}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\frac{ME}{BE} = \frac{HC}{HM}$ (đpcm)

c) Ta có ΔMHC vuông tại H nên tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMHC là trung điểm cạnh MC

ΔCPM nội tiếp đường tròn tâm là trung điểm cạnh MC nên $\widehat{CPM} = 90^0$

Lại có $\widehat{MPN} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra, $\widehat{MPN} + \widehat{CPM} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Suy ra C, P, N thẳng hàng. (7)

Xét ΔMHC và ΔBMC có:

$\widehat{CMH} = \widehat{MBC}$ (cùng phụ với góc $\widehat{MCB}$)

Mà $\widehat{MHC} = \widehat{CMB} = 90^0$

Suy ra $\Delta MHC \backsim \Delta BMC$ (g.g)

Suy ra, $\dfrac{HC}{MH} = \dfrac{MC}{BM}$. Mà $MB = BN$ (do hai đường kính MN và AB vuông góc với nhau)

Suy ra, $\dfrac{HC}{MH} = \dfrac{MC}{BN}$, kết hợp với $\dfrac{ME}{BE} = \dfrac{HC}{HM}$

Suy ra $\dfrac{MC}{BN} = \dfrac{ME}{BE}$. Mà $\widehat{EBN} = \widehat{EMC} = 90^0$

Suy ra $\Delta MCE \backsim \Delta BNE$ (c.g.c)

Suy ra, $\widehat{MEC} = \widehat{BEN}$. Mà $\widehat{MEC} + \widehat{BEC} = 180^0$ (Do M, E, B thẳng hàng)

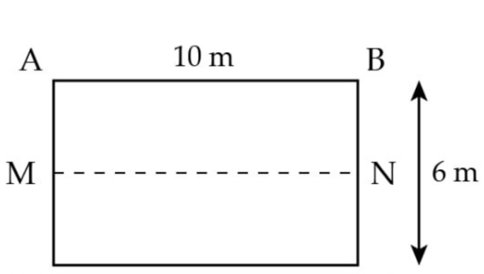
Suy ra, $\widehat{BEN} + \widehat{BEC} = 180^0$

Suy ra C, E, N thẳng hàng (8)

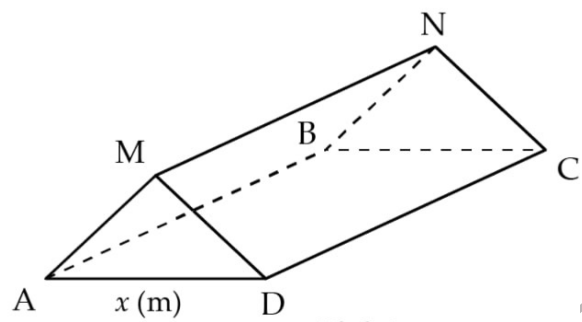
Từ (7) và (8) suy ra bốn điểm C, P, E, N thẳng hàng (đpcm).

Bài V. ***(0,5 điểm)***

Trong buổi thăm quan dã ngoại, mỗi lớp khối 9 được chuẩn bị một tấm bạt hình chữ nhật $ABCD$ cùng loại, có chiều dài 10m và chiều rộng 6m, với M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC (Hình 1).



Hình 1



Hình 2

Mỗi lớp sử dụng tấm bạt như trên để dựng thành chiếc lều có dạng hình lăng trụ đứng tam giác (Hình 2); hai đáy hình lăng trụ là hai tam giác cân: tam giác AMD và tam giác BNC, với độ dài cạnh đáy của hai tam giác cân này là $x\left(m\right)$. *(Tấm bạt chỉ sử dụng để dựng thành hai mái lều, không trải thành đáy lều).*

Tìm x để thể tích không gian trong lều là lớn nhất.

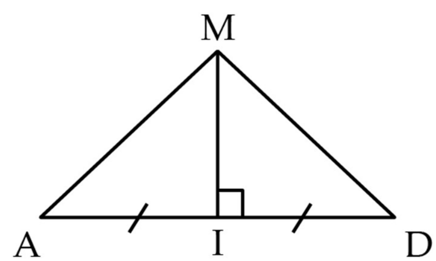
Hướng dẫn:

Ta có chiều rộng AD = 6m, M là trung điểm AD nên MD = 3m.

Điều kiện của x là $0 < x < 6$.

Gọi I là trung điểm AD như hình bên

suy ra ID = $\frac{x}{2}$ (m)



Do tam giác AMD cân tại M nên MI là đường cao trong tam giác AMD.

Áp dụng định lý Pytagore cho tam giác vuông MID ta có:

$MD^2 = MI^2 + ID^2$

suy ra $MI = \sqrt{MD^2 - ID^2} = \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{36 - x^2}{4}} = \frac{\sqrt{36 - x^2}}{2}$.

Ta có thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác là

$$V = S_{AMD}.AB = \frac{1}{2}x.\frac{\sqrt{36 - x^2}}{2}.10 = \frac{5}{2}x\sqrt{36 - x^2}\ \left(m^3\right)$$

Để thể tích phần không gian bên trong lều là lớn nhất thì V lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương x^2 và $36-x^2$, ta có:

$x\sqrt{36-x^2} \le \dfrac{x^2+36-x^2}{2} = 18$

$x\sqrt{36-x^2} \le 18$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$x = \sqrt{36-x^2}$$
$$x^2 = 36 - x^2$$
$$2x^2 = 36$$
$$x^2 = 18$$

$x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (thoả mãn $0 < x < 6$) hoặc $x = -\sqrt{18}$ (Loại)

Vậy thể tích không gian lớn nhất là $45m^3$ khi $x = 3\sqrt{2}\ m$.