

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ VÀO 10 HÀ NỘI (MATHX BIÊN SOẠN) – ĐỀ SỐ 03

Bài 1.

1) Bảng tần số ghép nhóm sau biểu diễn kết quả khảo sát cân nặng (đơn vị: kg) của một số trẻ sơ sinh ở một khu vực.

Cân nặng (kg)	[2,7; 2,9)	[2,9; 3,1)	[3,1; 3,3)	[3,3; 3,5)	[3,5; 3,7)	[3,7; 3,9)
Số trẻ sơ sinh	2	5	9	8	3	3

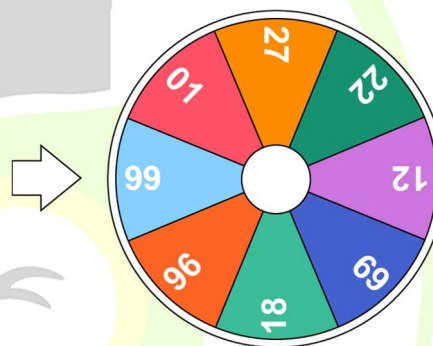
Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [3,1; 3,3).

Hướng dẫn giải

Tần số ghép nhóm của nhóm [3,1; 3,3) là: 9.

Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [3,1; 3,3) là: 30%.

2) Hình bên mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm tám phần bằng nhau và ghi các số 01; 12; 18; 22; 27; 69; 96; 99. Chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa. Quay đĩa tròn một lần. Tính xác suất của biến cố: “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số là số chia cho 5 dư 2”.



Hướng dẫn giải

Các kết quả thuận lợi cho biến cố “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số là số chia cho 5 dư 2” là: 12; 22; 27.

Vì các kết quả là đồng khả năng nên xác suất của biến cố “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số là số chia cho 5 dư 2” là: $\frac{3}{8}$.

Bài 2. Cho hai biểu thức $A = \frac{8}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{4}{9}$.

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$.

c) Cho $C = \frac{A}{B}$. Tìm x để biểu thức C nhận giá trị nguyên lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) Thay $x = \frac{4}{9}$ (TMĐK) vào biểu thức A, ta có:

$$A = \frac{8}{\sqrt{\frac{4}{9}}} = 12$$

Vậy $A = 9$ với $x = \frac{4}{9}$.

b) Với $x > 0; x \neq 4$, ta có:

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x} - 2 + x - \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} = \frac{x - 4}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$$

$$c) C = A : B = \frac{8}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} = \frac{8}{\sqrt{x} + 2}$$

$8 > 0, \sqrt{x} + 2 > 0$ suy ra $C > 0$.

Ta có $\sqrt{x} + 2 > 2$ suy ra $\frac{8}{\sqrt{x} + 2} < \frac{8}{2} = 4$.

Do đó $0 < C < 4$

Mà C là số nguyên lớn nhất nên $C = 3$.

Tìm được $x = \frac{4}{9}$ (TM).

Bài 3.

1) Một người đi siêu thị nếu mua 1 cái áo và 1 đôi giày theo giá niêm yết hết 800 000 đồng. Nhưng gặp đợt khuyến mãi, 1 cái áo giảm 5% và 1 đôi giày giảm 10% nên người đó chỉ phải trả 735 000 đồng. Ngoài ra, nếu khách mua hàng có hóa đơn từ 2 000 000 đồng trở lên sẽ được giảm tiếp 10% trên tổng số tiền đã mua. Trong dịp này, người đó đã mua 4 cái áo và 2 đôi giày. Hỏi người đó đã trả tất cả bao nhiêu tiền?

Hướng dẫn giải

Gọi giá niêm yết của 1 cái áo là x (nghìn đồng), 1 đôi giày là y (nghìn đồng).

$$\text{Theo bài ra ta có hệ } \begin{cases} x + y = 800 \\ 0,95x + 0,9y = 735 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x = 300 \\ y = 500 \end{cases}$$

Số tiền người đó đã trả khi mua 4 cái áo và 2 đôi giày là:

$$4 \times 300 \times 0,95 + 2 \times 500 \times 0,9 = 2040 \text{ (nghìn đồng)}$$

Do số tiền mua vượt quá 2 triệu đồng nên sẽ được giảm tiếp 10% khi đó số tiền phải trả là: $(4 \times 300 \times 0,95 + 2 \times 500 \times 0,9) \times 0,9 = 1836 \text{ (nghìn đồng)}$

Vậy số tiền người đó đã trả là 1 836 000 đồng.

2) Một tổ sản xuất có kế hoạch làm 200 sản phẩm cùng loại trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày tổ đã làm được nhiều hơn 30 sản phẩm so với số sản phẩm dự định làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn kế hoạch 6 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu sản phẩm? (Giả định rằng số sản phẩm mà tổ đó làm được trong mỗi ngày là bằng nhau).

Hướng dẫn giải

Gọi số sản phẩm mỗi ngày tổ sản xuất phải làm theo kế hoạch là: x (sản phẩm/ngày, $x \in \mathbb{N}^*$)

Thời gian tổ sản xuất hoàn thành theo kế hoạch là: $\frac{200}{x}$ ngày

Năng suất thực tế của tổ sản xuất làm là: $x + 30$ (sản phẩm/ngày)

Thời gian hoàn thành thực tế của tổ là: $\frac{200}{x + 30}$ (ngày)

Theo đề bài ra ta có phương trình: $\frac{200}{x} - \frac{200}{x + 30} = 6$

Giải phương trình trên tìm được $x = 20$ (thỏa mãn) và $x = -50$ (loại)

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày tổ sản xuất được 20 sản phẩm.

3) Cho phương trình bậc hai $9x^2 + 12x + m = 0$ nhận giá trị $x = \frac{\sqrt{5} - 2}{3}$ là một nghiệm.

Không giải phương trình, tính tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên.

Hướng dẫn giải

Để phương trình $9x^2 + 12x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$ hay $m < 4$.

Vì $x = \frac{\sqrt{5} - 2}{3}$ là một nghiệm của phương trình nên thay phương trình trên ta tìm được

$m = -1$ (thỏa mãn)

Khi đó phương trình trên trở thành $9x^2 + 12x - 1 = 0$.

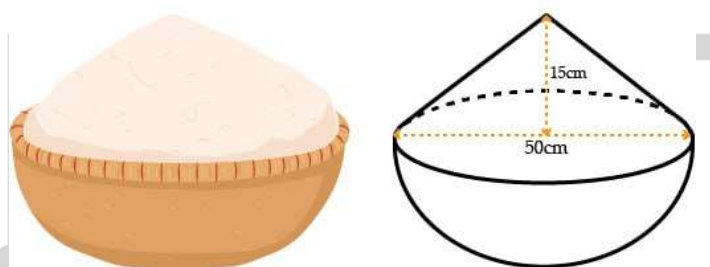
Phương trình $9x^2 + 12x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 vì $9 \cdot (-1) < 0$.

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-12}{9} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{9} \end{cases}$$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 2$.

Bài 4.

1) Cho hình bên là một thúng gạo vun đầy. Thúng có dạng nửa hình cầu với đường kính 50 cm, phần gạo vun lên có dạng hình nón cao 15 cm.



- a) Tính thể tích phần gạo trong thúng (làm tròn đến hàng phần mười).
 b) Nhà Danh dùng lon sữa bò cũ có dạng hình trụ bán kính đáy bằng 5 cm, chiều cao 15 cm để đựng gạo mỗi ngày. Biết mỗi ngày nhà Danh ăn 5 lon gạo và mỗi lần đựng thì lượng gạo chiếm 90% thể tích lon. Hỏi với lượng gạo ở thúng trên thì nhà Danh có thể ăn nhiều nhất là bao nhiêu ngày.

Hướng dẫn giải

- a) Bán kính hình cầu là: $50 : 2 = 25(\text{cm})$

Thể tích gạo trong thúng là:

$$\begin{aligned} V_{\text{gạo}} &= V_{\text{nón}} + \frac{1}{2} V_{\text{h.cầu}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \\ &= \frac{1}{3} \pi 25^2 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 25^3 = \frac{40625}{3} \pi \approx 42542,4 (\text{cm}^3). \end{aligned}$$

- b) Thể tích gạo 1 lần đựng là: $90\% \pi R^2 h = 0,9 \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15 = \frac{675}{2} \pi (\text{cm}^3)$.

Thể tích gạo 1 ngày nhà Danh ăn là: $5 \cdot \frac{675}{2} \pi = \frac{3375}{2} \pi (\text{cm}^3)$.

Với lượng gạo trong thúng số ngày nhiều nhất nhà Danh có thể ăn được là:

$$\frac{40625}{3} \pi : \left(\frac{3375}{2} \pi \right) \approx 8 \text{ ngày.}$$

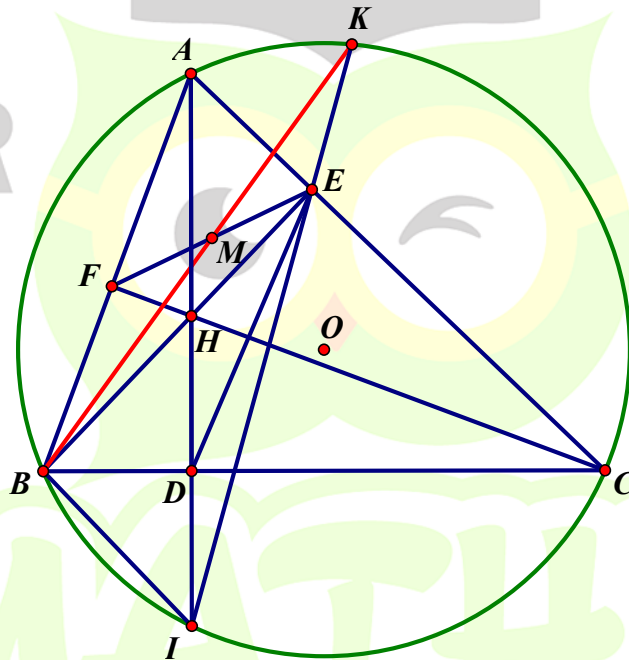
2) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi giao điểm của AD với (O) là I (I khác A). Chứng minh BC là đường trung trực của HI và $\triangle BFE \sim \triangle DHE$.

c) IE cắt (O) tại K (K khác I). Gọi M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng ba điểm B, M, K thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



a) Vì BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên:

$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ hay tam giác BFC và tam giác BEC là các tam giác vuông

Tam giác BFC vuông tại F nên 3 điểm B, F, C thuộc đường tròn đường kính BC (1)

Tam giác BEC vuông tại E nên 3 điểm B, E, C thuộc đường tròn đường kính BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm B, F, E, C cùng thuộc đường tròn đường kính BC.

b) Ta có $\widehat{EBC} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với góc ACB) hay $\widehat{EBC} = \widehat{CAI}$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{CAI} = \widehat{CBI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CI) nên $\widehat{EBC} = \widehat{CBI}$

Khi đó BC là tia phân giác của góc HBI, mà BC vuông góc với HI nên tam giác HBI cân tại B

Do đó BC là đường trung trực của HI

Xét đường tròn đường kính BC có $\widehat{BEF} = \widehat{BCF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF) hay $\widehat{BEF} = \widehat{HCD}$ (3)

Tương tự ý 1, chứng minh được 4 điểm C, D, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính CH

Xét đường tròn đường kính CH có:

$\widehat{HED} = \widehat{HCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BEF} = \widehat{HED}$ (5)

Tương tự ý 1, chứng minh được 4 điểm A, E, D, B cùng thuộc đường tròn đường kính AB.

Xét đường tròn đường kính AB có:

$\widehat{EBF} = \widehat{HDE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AE) (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\triangle BFE \sim \triangle DHE$ (g.g)

c) Vì $\triangle BFE \sim \triangle DHE$ nên $\frac{BF}{DH} = \frac{FE}{HE}$ hay $\frac{BF}{2DH} = \frac{FE}{2HE}$

Mà $HI = 2DH$ và $EE = 2FM$ nên $\frac{BF}{HI} = \frac{FM}{HE}$

Xét $\triangle BFM$ và $\triangle IHE$ có:

$\frac{BF}{HI} = \frac{FM}{HE}$ và $\widehat{BFM} = \widehat{IHE}$ (do $\triangle BFE \sim \triangle DHE$)

Suy ra $\triangle BFM \sim \triangle IHE$ (c.g.c)

Khi đó $\widehat{FBM} = \widehat{HIE}$ hay $\widehat{ABM} = \widehat{AIK}$ (7)

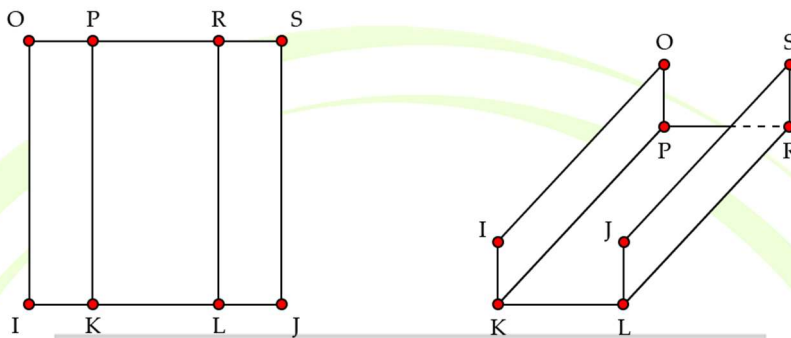
Xét đường tròn (O) có $\widehat{ABK} = \widehat{AIK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK) (8)

Từ (7) và (8) suy ra: $\widehat{ABM} = \widehat{ABK}$

Mà BM, BK nằm về cùng một phía đối với đường thẳng AB nên hai tia BM và BK trùng nhau, hay B, M, K thẳng hàng.

Bài 5. Bác Việt muốn uốn một tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật OSJI như hình vẽ, với bề ngang 30 cm thành một máng dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành 3 phần

rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông (xem hình vẽ minh họa). Biết $OP = RS = IK = LJ$. Tính chiều cao của máng dẫn nước để diện tích mặt cắt ngang của máng nước đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó.



Hướng dẫn giải

Đặt $IK = x$ (cm) ($x > 0$)

Vì tấm tôn có bề rộng 30 cm nên ta có phương trình:

$$2IK + KL = 30 \text{ hay } KL = 30 - 2x$$

Để thành một cái máng thì $KL > 0$ nên $30 - 2x > 0$ hay $x < 15$.

Diện tích mặt máng dẫn nước là :

$$S = IK \cdot KL = x(30 - 2x) = -2x^2 + 30x \text{ với } 0 < x < 15.$$

Cách 1 :

Ta có :

$$S = -2x^2 + 30x = -2 \left(x^2 - 2x \cdot \frac{15}{2} + \left(\frac{15}{2} \right)^2 - \left(\frac{15}{2} \right)^2 \right) = -2 \left(x - \frac{15}{2} \right)^2 + \frac{225}{2}$$

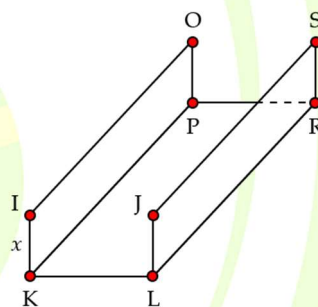
Do $-2 \left(x - \frac{15}{2} \right)^2 \leq 0$ luôn đúng với mọi x .

$$\text{Suy ra } S \leq \frac{225}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{15}{2}$ (tm)

Vậy diện tích của máng lớn nhất là $\frac{225}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$ khi chiều cao của máng là $\frac{15}{2} \text{ cm}$.

Cách 2:



Ta có: $S = x(30 - 2x) = 2x(15 - x)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương x và $(15 - x)$ ta được:

$$2x(15 - x) \leq 2 \cdot \frac{(x + 15 - x)^2}{4} = \frac{225}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{15}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy diện tích của máng lớn nhất là $\frac{225}{2} (\text{cm}^2)$ khi chiều cao của máng là $\frac{15}{2} \text{ cm}$.

