ĐÁP ÁN CHUYÊN ĐỀ
TUYỂN TẬP BÀI HÌNH HỌC PHẲNG TRONG CÁC ĐỀ THI – PHẦN 3

Bài 1: (Đề minh họa toán chung sở Quảng Ninh 2025 – 2026)

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên nửa đường tròn (O) lấy điểm C bất kì (C khác A và B), trên cung AC lấy điểm M sao cho $\overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{MA}$. Hai đường thẳng BC và AM cắt nhau tại E, hai đường thẳng BM và AC cắt nhau tại H.

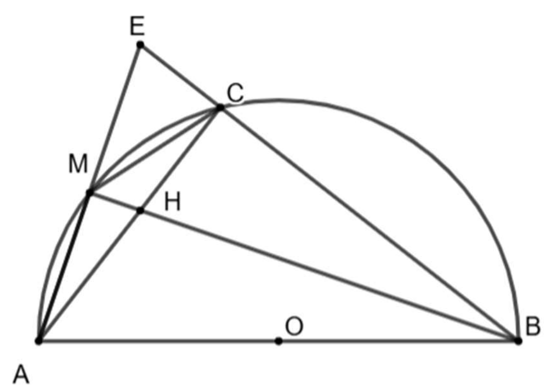
a) Chứng minh BM là phân giác của góc ABC

b) Chứng minh $ME^2 = MH.MB$

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BEH cắt nửa đường tròn (O) tại F, tia EF cắt AB tại P, hai đường thẳng BM và AF cắt nhau tại Q. Chứng minh $PQ \perp AB$.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh: BM là phân giác của góc ABC

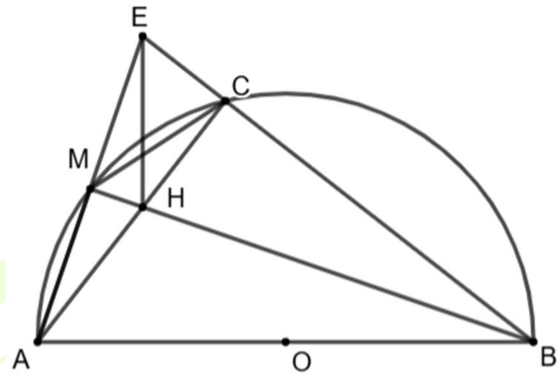


Ta có: MA = MC (gt) $\Rightarrow \Delta MAC$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{MAC}$ (tính chất tam giác cân)

Mà $\widehat{MCA} = \widehat{MBA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MA}$) ; $\widehat{MAC} = \widehat{CBM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CM}$)

$\Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{MBA}$ hay MB là phân giác của $\widehat{ABC}$ (đpcm)

b) Chứng minh: $ME^2 = MH.MB$



Do MB là phân giác của $\widehat{ABC}$ (gt) mà MB cũng là đường cao ($\widehat{BMA} = 90^\circ$ chắn đk AB)

$\Rightarrow \Delta BEA$ cân tại B với BM là đường trung trực nên M là trung điểm AE

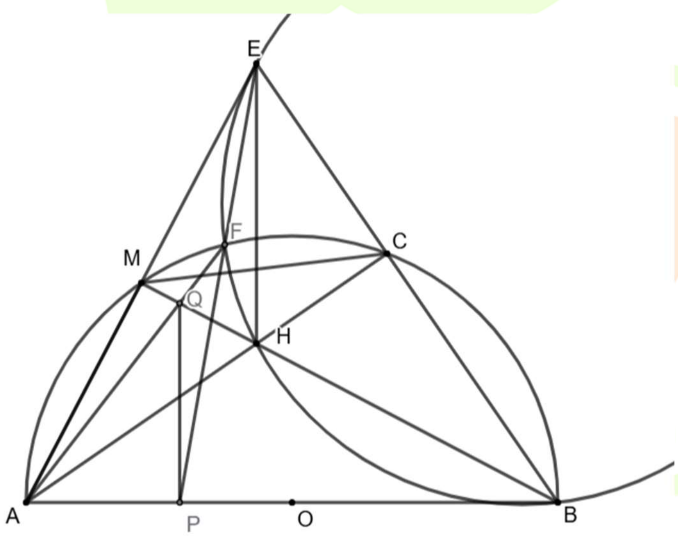
$\Rightarrow MA = ME$

Xét ΔAMH và ΔBMA có: $\widehat{M} = 90^\circ$; $\widehat{MAH} = \widehat{MBA}\left(=\widehat{MBC}\right)$

$\Rightarrow \Delta AMH \backsim \Delta BMA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AM}{BM} = \dfrac{MH}{MA} \Rightarrow MA^2 = MH.MB$ mà MA = ME (cmt)

$\Rightarrow ME^2 = MH.MB$ (đpcm)

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BEH cắt nửa đường tròn (O) tại F, tia EF cắt AB tại P, hai đường thẳng BM và AF cắt nhau tại Q. Chứng minh: $PQ \perp AB$.



Ta có: $\widehat{PFA} = \widehat{FAE} + \widehat{FEA}$ (góc ngoài ΔAEF) (1)

$\widehat{FAE} = \widehat{FBM}$ (nội tiếp (O) cùng chắn $\overset{\frown}{FA}$) và $\widehat{FBM} = \widehat{FEH}$ (nội tiếp đường tròn ngoại tiếp ΔBHE cùng chắn $\overset{\frown}{HF}$) $\Rightarrow \widehat{FAE} = \widehat{FEH}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PFA} = \widehat{FAE} + \widehat{FEA} = \widehat{FEH} + \widehat{FEA} = \widehat{HEA}$ (3)

Ta có $ME^2 = MH.MB \Rightarrow \dfrac{ME}{MH} = \dfrac{MB}{ME}$

Xét ΔMEH và ΔMBE có: $\widehat{EMH} = \widehat{BME}\left(= 90^\circ\right)$; $\dfrac{ME}{MH} = \dfrac{MB}{ME}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MEH \backsim \Delta MBE\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{MEH} = \widehat{MBE}$ (cặp góc tương ứng)

Mà $\widehat{MBE} = \widehat{MBA}$ nên $\widehat{MBA} = \widehat{MEH} = \widehat{HEA}$ (4)

Từ (3), (4) ta được $\widehat{PFA} = \widehat{MBA}$.

Xét ΔAFP và ΔABQ có: $\widehat{PFA} = \widehat{MBA}$ (cmt); $\widehat{A}$ chung

$\Rightarrow \Delta AFP \backsim \Delta ABQ\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{AF}{AB} \Rightarrow \dfrac{AP}{AF} = \dfrac{AQ}{AB}$

Xét ΔQAP và ΔABF có: $\widehat{A}$ chung; $\dfrac{AP}{AF} = \dfrac{AQ}{AB}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta QAP \backsim \Delta ABF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{QPA} = \widehat{BFA}$ mà $\widehat{BFA} = 90^\circ$ nên $QP \perp AB$

Bài 2: (Đề minh họa toán chung sở Quảng Nam năm 2025 – 2026)

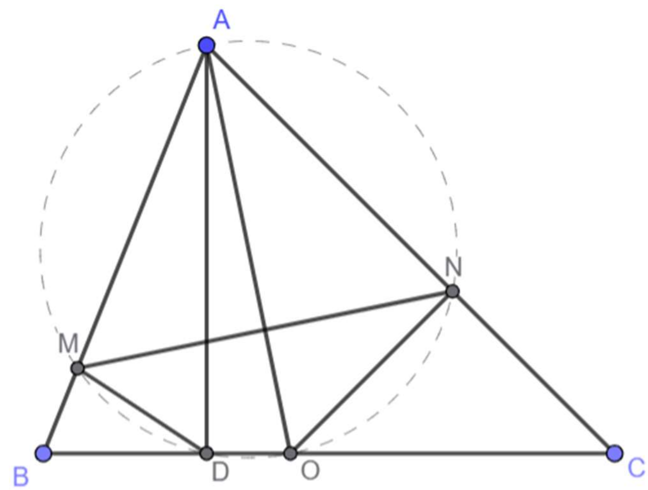
Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) có đường cao AD và đường phân giác trong AO (D, O thuộc cạnh BC) . Kẻ OM vuông góc với AB tại M, ON vuông góc với AC tại N.

a) Chứng minh bốn điểm D, M, N, O cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh OM = ON và góc BDM = góc ODN

c) Qua O, kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt MN tại I, AI cắt BC tại K. Chứng minh K là trung điểm của BC.

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh bốn điểm D, M, N, O cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có: $OM \perp AB; ON \perp AC$ nên ΔAMO vuông tại M và ΔANO vuông tại N.

AD là đường cao của ΔABC nên ΔADO vuông tại D.

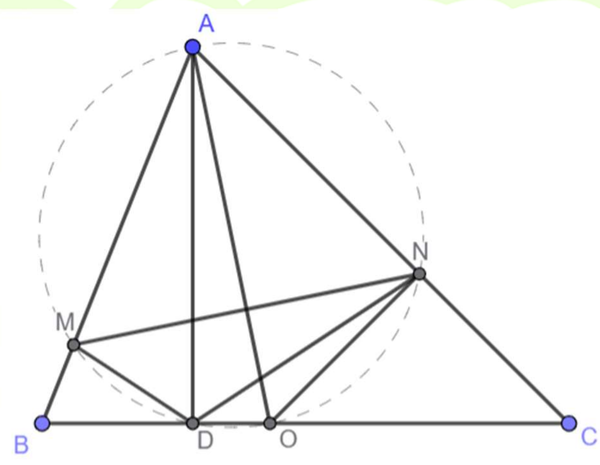
ΔAMO vuông tại M nên A, M, O thuộc đường tròn đường kính AO

ΔANO vuông tại N nên A, N, O thuộc đường tròn đường kính AO

ΔADO vuông tại D nên A, D, O thuộc đường tròn đường kính AO

$\Rightarrow A, M, D, O, N$ thuộc đường tròn đường AO

b) Chứng minh OM = ON và $\widehat{BDM} = \widehat{ODN}$



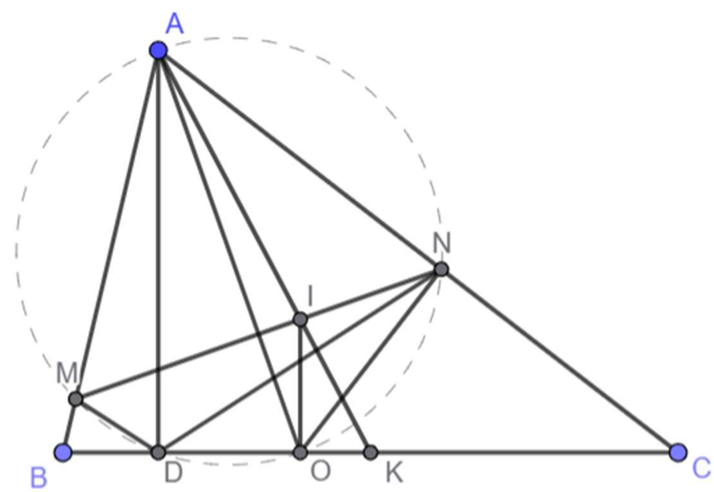
Xét ΔOAM vuông tại M và ΔOAN vuông tại N có: AO chung; $\widehat{MAO} = \widehat{NAO}$ (AO là phân giác)

$\Rightarrow \Delta OAM = \Delta OAN$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow OM = ON$

Do tứ giác MDON nội tiếp $\widehat{ODN} = \widehat{OMN}$ (cùng chắn $\overset\frown{ON}$); $\widehat{MNO} = \widehat{MDB}$ (cùng bù $\widehat{MDO}$)

$\Rightarrow \widehat{ODN} = \widehat{BDM}\left(= \widehat{OMN}\right)$

c) Qua O, kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt MN tại I, AI cắt BC tại K. Chứng minh K là trung điểm của BC.



Qua I, kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại P, Q.

Ta có: $\widehat{IOP} = \widehat{IMP}$ (cm được tứ giác MPIO nội tiếp) mà $\widehat{IMP} = \widehat{ANM}$ (ΔANM cân tại A)

Lại có: $\widehat{INA} = \widehat{IOQ}$ (vì tứ giác IONQ nội tiếp)

Suy ra $\widehat{IOP} = \widehat{IOQ}$. Mà OI vuông góc với PQ nên OI là trung trực của ΔOPQ

$\Rightarrow$ I là trung điểm của PQ, nên IP = IQ

Xét ΔAPI và ΔABK theo định lý thales được: $\dfrac{PI}{BK} = \dfrac{AI}{AK}$ (1)

Xét ΔAIQ và ΔAKC theo định lý Thales được $\dfrac{IQ}{KC} = \dfrac{AI}{AK}$ (2)

(1)(2) $\Rightarrow \dfrac{IP}{KB} = \dfrac{AI}{AK} = \dfrac{IQ}{KC}$. Mà $IP = IQ$ suy ra $KB = KC$ mà B, K, C thẳng hàng.

Vậy K là trung điểm của BC.

Bài 3 (Đề THCS Nhữ Bá Sỹ - Thanh Hóa)

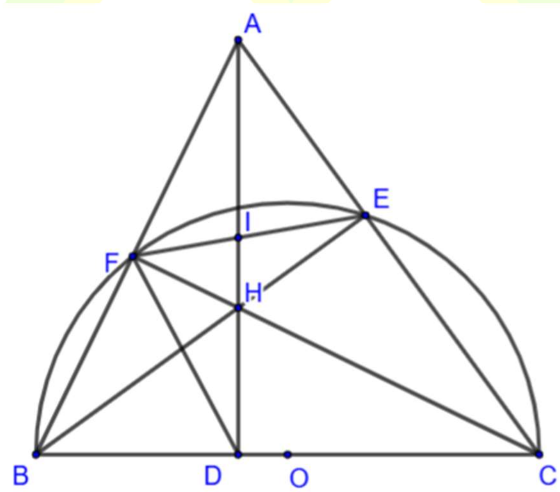
Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC. Trên cung BC lấy các điểm F, E (F thuộc cung BE; E, F khác B và C); đường thẳng BF và CE cắt nhau tại A; BE và CF cắt nhau tại H; đường thẳng AH cắt EF và BC lần lượt tại I và D. Đường thẳng qua I song song với BC cắt AB, BE lần lượt tại P, Q. Tia AQ cắt BC tại K

a) Chứng minh các tứ giác AEHF, ACDF là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $AI.HD = AD.HI$ và D là trung điểm của BK.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh các tứ giác AEHF, ACDF là tứ giác nội tiếp



ΔAFH vuông tại F $\Rightarrow$ A, F, H thuộc đường tròn đường kính AH

ΔAEH vuông tại E $\Rightarrow$ A, E, H thuộc đường tròn đường kính AH

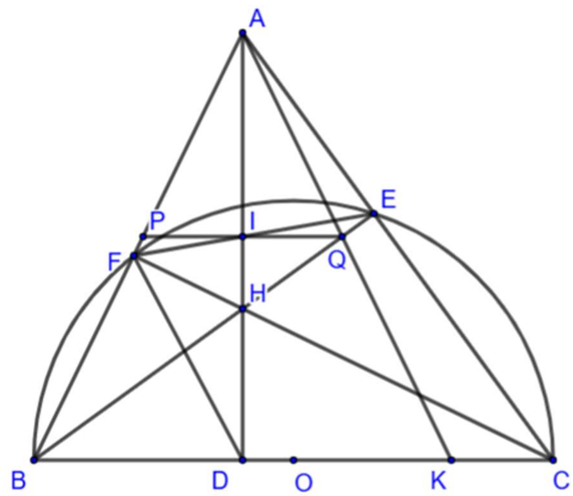
$\Rightarrow$ 4 điểm A, E, H, F thuộc đường tròn đường kính AH hay tứ giác AEHF nội tiếp

Lại có: ΔAFC vuông tại F $\Rightarrow$ A, F, C thuộc đường tròn đường kính AC

ΔADC vuông tại D $\Rightarrow$ A, D, C thuộc đường tròn đường kính AC

$\Rightarrow$ 4 điểm A, F, D, C thuộc đường tròn đường kính AC hay tứ giác ACDF nội tiếp

b) Chứng minh $AI.HD = AD.HI$ và D là trung điểm của BK.



Do tứ giác AEHF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EFH} = \widehat{EAH}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EH}$)

Tứ giác ACDF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DFH} = \widehat{EAH}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$)

$\Rightarrow \widehat{EFH} = \widehat{DFH} \Rightarrow$ FH là phân giác của $\widehat{DFE}$

Xét ΔIFD có FH là tia phân giác trong tại đỉnh F nên ta có : $\frac{HI}{HD} = \frac{FI}{FD}(1)$ (tính chất)

Lại có: $FH \perp FA$ nên FA là tia phân giác ngoài tại đỉnh F của ΔDFE

$\Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{FI}{FD}(2)$ (Tính chất tia phân giác góc ngoài)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{HI}{HD} = \frac{AI}{AD} \Rightarrow AI.HD = AD.HI$

Ta có: IP // BD $\Rightarrow \frac{IP}{BD} = \frac{AI}{AD}$ (3) (Hệ quả định lý Thales)

IQ // BD $\Rightarrow \frac{IQ}{BD} = \frac{IH}{HD}$ (4)

Mà $\frac{HI}{HD} = \frac{AI}{AD}$ (5) (cmt)

Từ (3)(4)(5) $\Rightarrow \dfrac{IP}{DB} = \dfrac{IQ}{BD} \Rightarrow IP = IQ$

Ta lại có: IP // DB $\Rightarrow \dfrac{IP}{DB} = \dfrac{AI}{AD}$

IQ // DK $\Rightarrow \dfrac{IQ}{DK} = \dfrac{AI}{AD}$

$\Rightarrow \dfrac{IP}{DB} = \dfrac{IQ}{DK}$

Mà $IP = IQ \Rightarrow DK = DK \Rightarrow$ D là trung điểm của BK

Bài 4 (Đề khảo sát Sở Tiền Hải – Thái Bình)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác giao nhau tại H.

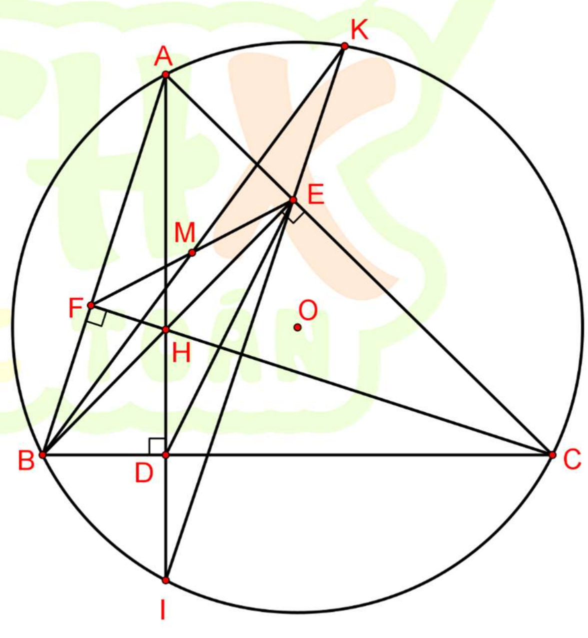
a) Chứng minh rằng tứ giác BFEC nội tiếp và $BH.BE = BD.BC$

b) Chứng minh hai tam giác BFE và DHE đồng dạng

c) Gọi giao điểm của AD với (O) là I, IE cắt (O) tại K, M là trung điểm EF. Chứng minh 3 điểm B, M, K thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh rằng tứ giác BFEC nội tiếp và $BH.BE = BD.BC$



Vì $AD \perp BC; BE \perp AC$ nên:
$\widehat{BEC} = 90^\circ; \widehat{BFC} = 90^\circ$.

Vì $\triangle BEC$ vuông tại E nên 3 điểm B; E; C cùng thuộc đường tròn có đường kính BC.

Vì $\triangle BFC$ vuông tại F nên 3 điểm B; F; C cùng thuộc đường tròn có đường kính BC.

Suy ra B; E; F; C cùng thuộc một đường tròn đường kính BC Vậy tứ giác BFEC nội tiếp.

Chứng minh được $\Delta BDH \backsim \Delta BEC(g.g)$.

Suy ra: $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BD}{BE}$ nên BH. BE = BD. BC.

b) Chứng minh hai tam giác BFE và DHE đồng dạng

Vì tứ giác BFEC nội tiếp nên $\widehat{BEF} = \widehat{BCF}$. (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

Hay $\widehat{BEF} = \widehat{HCD}$.

Tương tự chứng minh tứ giác CDHE nội tiếp nên $\widehat{HED} = \widehat{HCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

Suy ra $\widehat{BEF} = \widehat{HED}$ (1)

Chứng minh được tứ giác ABDE nội tiếp suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{ADE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AE)(2)

Từ (1) và (2) chỉ ra $\triangle BFE \sim \Delta DHE$ (g.g)

c) Gọi giao điểm của AD với (O) là I, IE cắt (O) tại K, M là trung điểm EF. Chứng minh 3 điểm B, M, K thẳng hàng.

Chỉ ra đươc $\widehat{EBC} = \widehat{CBI}$ (vì cùng bằng góc CAI)

Do đó BC là tia phân giác của $\widehat{HBI}$ suy ra tam giác HBI cân tại B

Nên D là trung điểm của IH .

Vì $\triangle BFE \backsim \Delta DHE$ nên $\dfrac{BF}{DH} = \dfrac{FE}{HE}$ hay $\dfrac{BF}{2DH} = \dfrac{FE}{2HE}$

Mà $HI = 2DH$ và $FE = 2FM$ (M là trung điểm của FE)

Do đó $\dfrac{BF}{HI} = \dfrac{FM}{HE}$.

Suy ra $\triangle$ BFM $\sim \Delta$ IHE (c.g.c).

Khi đó $\widehat{FBM} = \widehat{HIE}$ hay $\widehat{ABM} = \widehat{AIK}(3)$.

Mặt khác trong (O) $\widehat{ABK}=\widehat{AIK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK) (4). Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{ABM}=\widehat{ABK}$ nên hai tia BM và BK trùng nhau.

Vậy 3 điểm $B;M;K$ thẳng hàng.

Bài 5 (Đề khảo sát Sở Tiền Hải – Thái Bình):

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định. Một điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC luôn nhọn. Các đường cao AD, BE của tam giác ABC cắt nhau tại H. BE cắt đường tròn (O) tại F (F khác B)

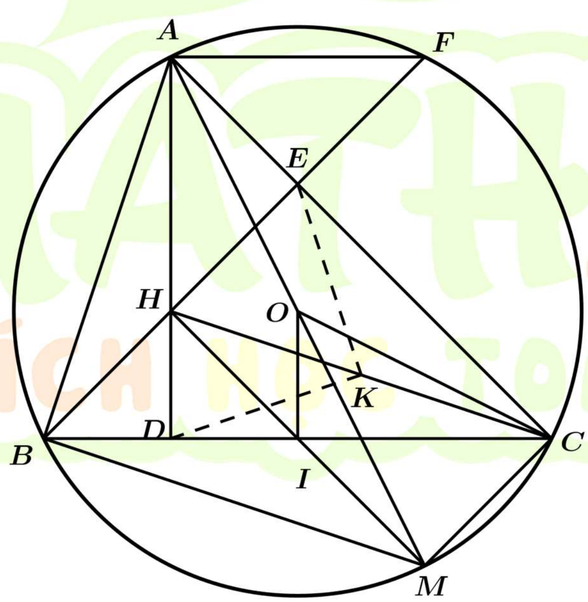
a) Chứng minh rằng tứ giác DHEC nội tiếp

b) Kẻ đường kính AM của đường tròn (O) và OI vuông góc với BC tại I. Chứng minh tứ giác BHCM là hình bình hành

c) Tính AF theo R, biết $BC=R\sqrt{3}$.

d) Khi BC cố định, xác định vị trí của A trên đường tròn (O) để $DH.DA$ lớn nhất.

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh rằng tứ giác DHEC nội tiếp

Vì $AD \perp BC; BE \perp AC$ nên: $\widehat{HDC} = 90^\circ; \widehat{HEC} = 90^\circ$

Gọi K là trung điểm của HC , ta có $KH = KC = \frac{1}{2}HC$ (1) Xét ΔDHC vuông tại D có DK là đường trung tuyến nên $DK = \frac{1}{2}HC$ (2). Xét ΔEHC vuông tại E có EK là đường trung tuyến nên $EK = \frac{1}{2}HC$ (3).

Từ (1),(2),(3) suy ra $KH = KC = DK = EK$, suy ra bốn điểm D,H,E,C cùng thuộc một đường tròn tâm K đường kính HC suy ra tứ giác DHEC nội tiếp.

b) Kẻ đường kính AM của đường tròn (O) và OI vuông góc với BC tại I. Chứng minh tứ giác BHCM là hình bình hành

Xét $\triangle ABC$ có BE, AD là hai đường cao cắt nhau tại H $\Rightarrow$ H là trực tâm $\triangle ABC \Rightarrow CH \perp AB$

Xét (O) có: $\widehat{ABM}, \widehat{ACM}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn nửa đường tròn đường kính AM. Nên $\widehat{ABM} = \widehat{ACM} = 90^\circ$.

$$\Rightarrow \begin{cases} MB \perp AB \\ MC \perp AC \end{cases} \text{mà} \begin{cases} CH \perp AB(cmt) \\ BH \perp AC(GT) \end{cases}$$

Suy ra: $MB//CH, MC//BH \Rightarrow BHCM$ là hình bình hành

c) Tính AF theo R, biết $BC = R\sqrt{3}$.

Xét Tam giác OBC có $OB = OC(=R)$ suy ra tam giác OBC cân tại O mà OI vuông góc với BC tại I , nên đường cao OI đồng thời là đường trung tuyến suy ra I là trung điểm của BC . Ta có tứ giác BHCM là hình bình hành (cmt) suy ra I là trung điểm MH .

Vì I là trung điểm của $BC \Rightarrow BI = CI = \frac{BC}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ Áp dụng định lí py-ta-go vào ΔCIO vuông tại I ta có: $OC^2 = OI^2 + CI^2 \Rightarrow R^2 = OI^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2$ nên $OI^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow OI = \frac{R}{2}$.

Xét đường tròn (O) có $\widehat{ACB} = \widehat{AFB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$)

Lại có : Tứ giác DHEC nội tiếp đường tròn (c / m trên) có

$\widehat{DCE} + \widehat{DHE} = 180^\circ$ (tổng hai góc đối của tứ giác nội tiếp) (1)

Lại có $\widehat{EHA} + \widehat{DHE} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{DCE} = \widehat{EHA}$ hay $\widehat{ACB} = \widehat{AHF}$

Suy ra $\widehat{AFB} = \widehat{AHF} \Rightarrow \triangle AHF$ cân tại A

Xét $\triangle AHM$ có: O là trung điểm của AM (gt), Ilà trung điểm của $HM(c/mt)$

Nên OI là đường trung bình của $\triangle AHM$.

$\Rightarrow AH = 2.OI = 2\cdot\frac{R}{2} = R$ mà $AF = AH$ (vì ΔAHF cân tại A). vậy $AF = R$

d) Khi BC cố định, xác định vị trí của A trên đường tròn (O) để $DH.DA$ lớn nhất.

Xét tam giác DHB và tam giác DCA có $\widehat{BDH} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ (vì $AD \perp BC$)

$\widehat{HBD} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$)

Vậy $\triangle DHB \sim \triangle DCA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DH}{DC} = \frac{DB}{DA}$ nên $DH\cdot DA = DB\cdot DC$

Áp dụng BĐT $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$, nên ta có: $DB.DC \le \frac{(DB+DC)^2}{4} = \frac{BC^2}{4}$

$\Rightarrow DH.DA \le \frac{BC^2}{4}$ không đổi vì BC cố định.

Dấu " $=$ " xảy ra khi $DB = DC$ mà AH vuông góc với BC tại D , suy ra A là giao điểm của đường trung trực của BC với đường tròn tâm O .

Vậy A là giao điểm của đường trung trực của BC với đường tròn tâm O thì DH.DA đạt giá trị lớn nhất.