

CHUYÊN ĐỀ TUYỂN TẬP BÀI HÌNH HỌC PHẪNG TRONG CÁC ĐỀ THI_P2

Bài 1. (Đề khảo sát chất lượng quận Hoàn Kiếm – Hà Nội)

Cho đường tròn tâm (O), đường kính AB. Lấy điểm C thuộc đường tròn (O) sao cho $CA < CB$ và điểm D thuộc đoạn OA (D khác O, A). Đường thẳng qua C vuông góc với CD cắt các tiếp tuyến của (O) tại A và B lần lượt tại E và F.

- Chứng minh bốn điểm A, C, D, E cùng thuộc một đường tròn
- Chứng minh $\widehat{FCB} = \widehat{FDB}$ và $\triangle DEF$ là tam giác vuông.
- AC cắt DE tại M, BC cắt DF tại N. Lấy điểm P, Q lần lượt là trung điểm của DE, DF. Chứng minh MN, PQ, CO đồng quy.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh bốn điểm A, C, D, E cùng thuộc một đường tròn

$\widehat{EAD} = 90^\circ$ (AE tiếp tuyến tại A) nên $\triangle EAD$ vuông tại A
 $\Rightarrow E, A, D$ thuộc đường tròn đường kính ED

$\widehat{ECD} = 90^\circ$ (gt) nên $\triangle ECD$ vuông tại C $\Rightarrow E, C, D$ thuộc đường tròn đường kính ED

$\Rightarrow 4$ điểm A, C, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính ED.

b) Chứng minh $\widehat{FCB} = \widehat{FDB}$ và $\triangle DEF$ là tam giác vuông

Tương tự: $\triangle DCF$ vuông tại C $\Rightarrow D, C, F$ thuộc đường tròn đường kính DF

$\triangle DBF$ vuông tại B $\Rightarrow D, B, F$ thuộc đường tròn đường kính DF

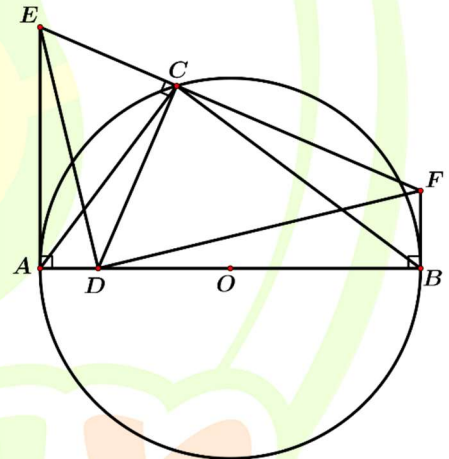
$\Rightarrow 4$ điểm D, C, F, B thuộc đường tròn đường kính DF.

$\Rightarrow$ tứ giác DCFB nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{FCB} = \widehat{FDB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

$\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{ACE} + \widehat{BCF} = 90^\circ$

Tứ giác ADCE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ACE}$



Tứ giác DBFC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FCB} = \widehat{FDB}$

$\Rightarrow \widehat{ADE} + \widehat{FDB} = 90^\circ$ mà $\widehat{ADE} + \widehat{FDB} + \widehat{EDF} = 180^\circ$ (góc bẹt)

$\Rightarrow \widehat{EDF} = 180^\circ - \widehat{ADE} - \widehat{FDB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle DEF$ là tam giác vuông.

c) AC cắt DE tại M, BC cắt DF tại N. Lấy điểm P, Q lần lượt là trung điểm của DE, DF. Chứng minh MN, PQ, CO đồng quy.

$\triangle MCN$ vuông tại C và $\triangle MDN$ vuông tại D nên tứ giác MCDN nội tiếp đường tròn đường kính MN $\Rightarrow \widehat{CNM} = \widehat{MDC}$ (chắn $\widehat{CM}$) (1)

Ta có: $\widehat{MDC} + \widehat{CDF} = 90^\circ$ và $\widehat{CDF} + \widehat{CFD} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{CFD}$ (Cùng phụ $\widehat{CDF}$)

Mà $\widehat{CFD} = \widehat{CBD}$ (chắn cung $\widehat{CD}$) (3)

(1)(2)(3) $\Rightarrow \widehat{MNC} = \widehat{CBD}$ (vị trí đồng vị) $\Rightarrow MN \parallel AB$

Gọi I là giao điểm của CO và MN

Theo hệ quả của Định lí Thales ta có: $\frac{MI}{AO} = \frac{CI}{CO} = \frac{IN}{OB}$

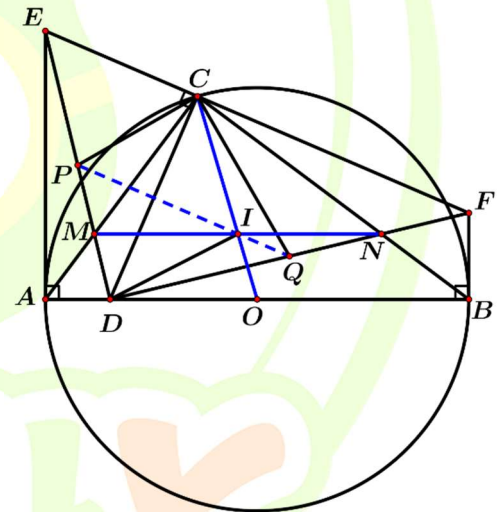
mà $AO = OB$.

$\Rightarrow MI = NI \Rightarrow I$ là trung điểm MN $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MDNC $\Rightarrow IC = ID$

$\triangle ECD$ vuông tại C $\Rightarrow PC = PD$

$\triangle DCF$ vuông tại C $\Rightarrow QC = QD$

$\Rightarrow P, I, Q$ thuộc trung trực CD $\Rightarrow PQ, CO, MN$ đi qua I (đpcm)



Bài 2. (Đề thi thử vào 10 năm 2025 - 2026 trường Chuyên Lam Sơn – Thanh Hoá – đề chung)

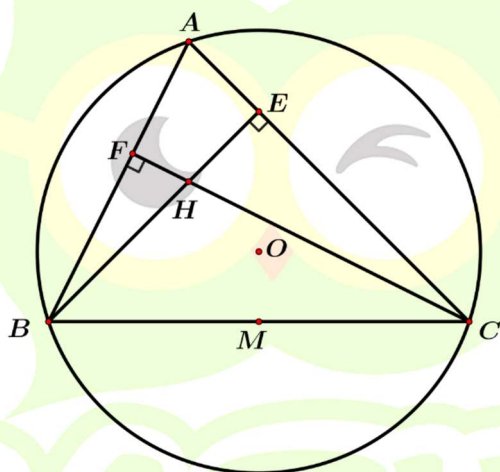
Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định (BC không là đường kính), điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H (E thuộc AC, F thuộc AB).

a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$. Tìm vị trí điểm A sao cho diện tích tam giác AEF lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn.

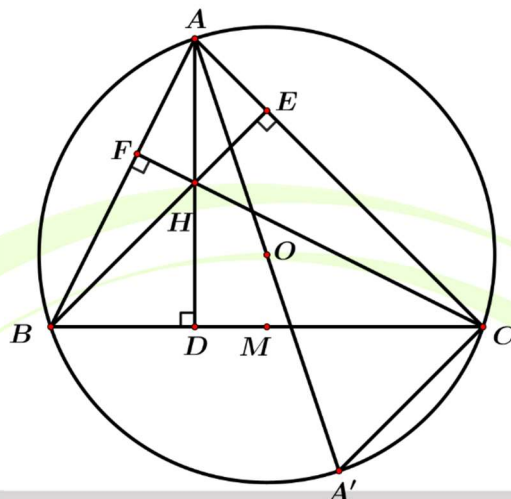


Gọi M là trung điểm cạnh BC . Theo giả thiết tam giác BEC vuông tại E có M là trung điểm cạnh huyền BC , suy ra $ME = \frac{1}{2}BC = MB = MC$ (1)

Tương tự ta có $MF = MB = MC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ME = MF = MB = MC$, suy ra tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC .

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$



Kẻ đường cao AD của tam giác ABC và đường kính AA' của đường tròn (O).

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ACA'$ có:

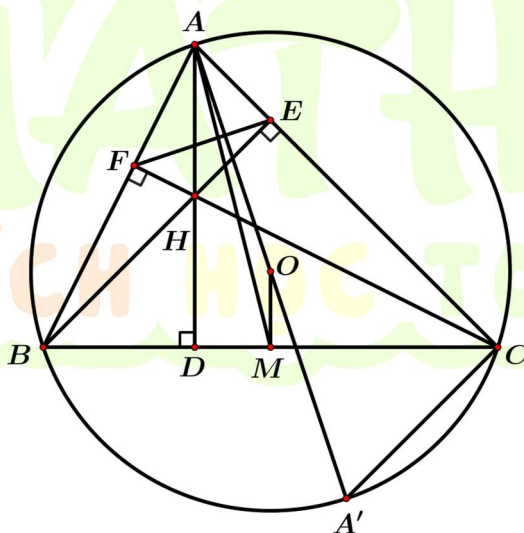
$$\widehat{ADB} = \widehat{ACA'} = 90^\circ$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{ABC} = \widehat{AA'C} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{AC}$$

Suy ra $\triangle ADB \sim \triangle ACA'$ (g.g)

Suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Tìm vị trí điểm A sao cho diện tích tam giác AEF lớn nhất.



Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC}$ chung và $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ (tứ giác BCEF nội tiếp)

Suy ra $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (g.g)

Suy ra $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \cos A$ không đổi (do $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{BC}$ không đổi)

Từ $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ suy ra $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{EF}{BC}\right)^2 = \cos^2 A$.

Suy ra $S_{AEF} = S_{ABC} \cdot \cos^2 A$.

Do đó S_{AEF} lớn nhất khi và chỉ khi S_{ABC} lớn nhất.

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC$ mà BC không đổi, do đó S_{ABC} lớn nhất khi và chỉ khi AD lớn nhất.

Ta có: $AD \leq AM \leq AO + OM$ không đổi, dấu bằng trong dãy bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $D \equiv M$ hay A, O, M thẳng hàng khi và chỉ khi A là điểm chính giữa cung lớn BC.

Bài 3. (Đề khảo sát chất lượng tháng 2 quận Thanh Trì – Hà Nội)

Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và MN vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia MA lấy điểm C khác điểm M. Kẻ MH vuông góc với BC (H thuộc BC).

- Chứng minh B, O, M, H cùng thuộc một đường tròn.
- MB cắt OH tại E. Chứng minh HO là tia phân giác của góc MHB và $ME \cdot MB = EB \cdot MC$
- Gọi giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC là K. Chứng minh 3 điểm C, K, E thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

- Chứng minh B, O, M, H cùng thuộc một đường tròn.

ΔBOM vuông tại O (MN vuông AB tại O) $\Rightarrow M, O, B$ thuộc đường tròn đường kính MB

ΔMHB vuông tại H (gt) $\Rightarrow M, H, B$ thuộc đường tròn đường kính MB .

$\Rightarrow 4$ điểm B, O, M, H cùng thuộc đường tròn đường kính MB (đpcm)

b) MB cắt OH tại E . Chứng minh HO là tia phân giác của góc MHB và $ME \cdot MB = EB \cdot MC$

Tứ giác $MHBO$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MHO} = \widehat{MBO}$ (cùng chắn $\widehat{MO}$)

$\Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{OHB}$ (cùng chắn $\widehat{OB}$)

Mà $\widehat{OMB} = \widehat{OBM}$ (tính chất tam giác cân)

$\Rightarrow \widehat{MHO} = \widehat{HOB} \Rightarrow HO$ là tia phân giác của góc MHB (đpcm)

Xét ΔMHB và ΔCMB có: $\widehat{MBH}$ chung,
 $\widehat{BHM} = \widehat{BMC} (= 90^\circ)$

$\Rightarrow \Delta CMB \sim \Delta MHB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MH}{CM} = \frac{HB}{MB} \Rightarrow \frac{MH}{BH} = \frac{MC}{MB}$
(tỉ số đồng dạng) (1)

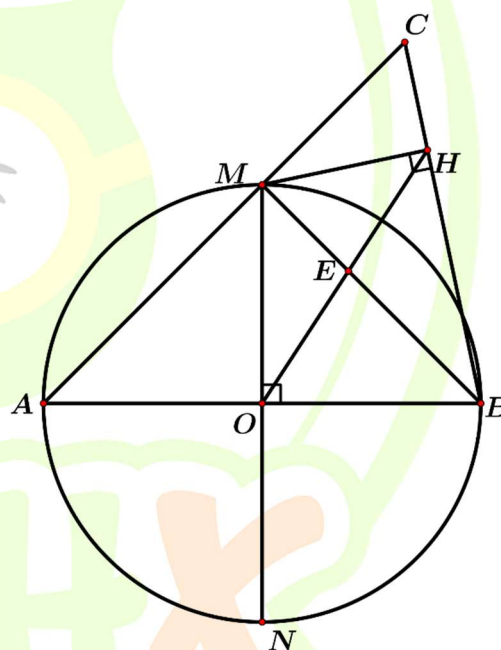
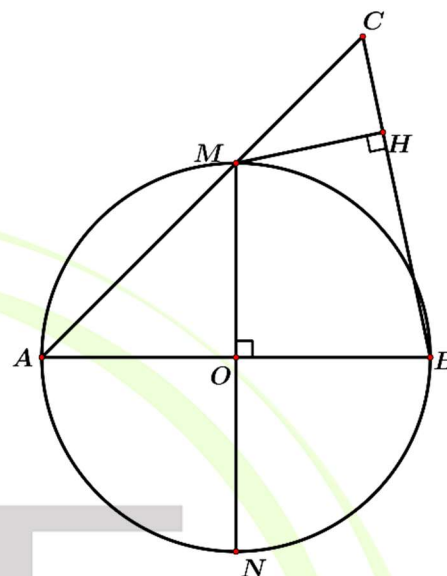
Do HO là phân giác của $\widehat{MHB}$ nên ta có tỉ lệ:

$$\frac{MH}{BH} = \frac{ME}{BE} \quad (2)$$

$$(1)(2) \Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{ME}{BE} \left(= \frac{MH}{BH} \right) \Rightarrow MC \cdot BE = MB \cdot ME \text{ (đpcm)}$$

c) Gọi giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC là K . Chứng minh 3 điểm C, K, E thẳng hàng.

Ta có: ΔMHC vuông tại $H \Rightarrow MC$ là đường kính $\Rightarrow \widehat{MKC} = 90^\circ$



MN là đường kính $\Rightarrow \widehat{MKN} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MKN} + \widehat{MKC} = 180^\circ \Rightarrow C, K, N$ thẳng hàng

Lại có : $MC.BE = MB.ME$ mà $MB = NB$

$$\Rightarrow MC.BE = NB.ME \Rightarrow \frac{MC}{BN} = \frac{ME}{BE}$$

Xét $\triangle CME$ và $\triangle NBE$ có: $\widehat{CME} = \widehat{EBN} (= 90^\circ)$;

$$\frac{MC}{BN} = \frac{ME}{BE} \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow \triangle CME \sim \triangle NBE$ (c.g.c)

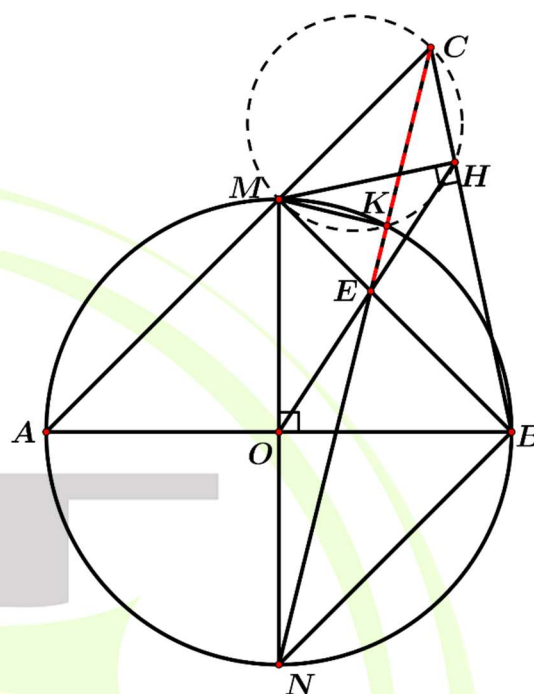
$$\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{BEN}$$

Ta có M, E, B thẳng hàng nên $\widehat{MEN} + \widehat{NEB} = 180^\circ$

Mà $\widehat{MEC} = \widehat{BEN}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{MEN} + \widehat{MEC} = 180^\circ$ (bệt) $\Rightarrow N, E, C$ thẳng hàng

$\Rightarrow N, E, C, K$ thẳng hàng (đpcm)



Bài 4. (Đề khảo sát Trường THCS Xi Măng – Thanh Hóa năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi H là điểm nằm giữa O và B. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. trên cung nhỏ AC lấy điểm E bất kỳ (E khác A và C). Từ C, kẻ CK vuông góc với AE tại K (K thuộc AE). Đường thẳng DE cắt CK tại F.

a) Chứng minh 4 điểm A, H, C, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh KH song song với ED.

c) Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác ADF lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh 4 điểm A, H, C, K cùng thuộc một đường tròn

ΔAKC vuông tại $K \Rightarrow A, K, C$ thuộc đường tròn đường kính AC

ΔAHC vuông tại $H \Rightarrow A, H, C$ thuộc đường tròn đường kính AC

$\Rightarrow A, H, C, K$ thuộc đường tròn đường kính AC (đpcm)

b) Chứng minh KH song song với ED

Tứ giác $AHCK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CHK} = \widehat{CAK}$ (cùng chắn $\widehat{KC}$)

Mà $\widehat{KAC} = \widehat{EDC}$ (cùng chắn $\widehat{EC}$ của (O))

$\Rightarrow \widehat{KHC} = \widehat{EDC}$ (vị trí đồng vị)

$\Rightarrow KH // ED$ (đpcm)

c) Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác ADF lớn nhất.

Do $HK // DF$, mà chứng minh được H là trung điểm CD nên K là trung điểm FC (tính chất đường trung bình) $\Rightarrow \Delta FAC$ cân tại $A \Rightarrow AF = AC$

ΔACD cân tại A nên $AC = AD$

$\Rightarrow AF = AD$ hay ΔAFD cân tại A

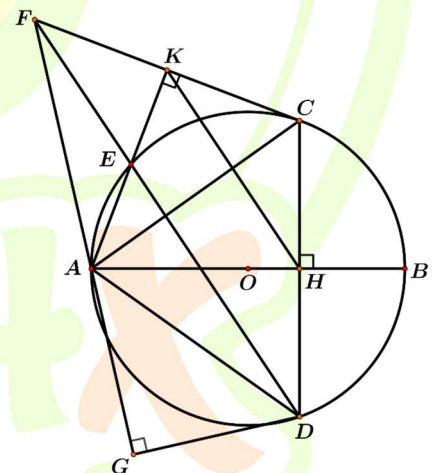
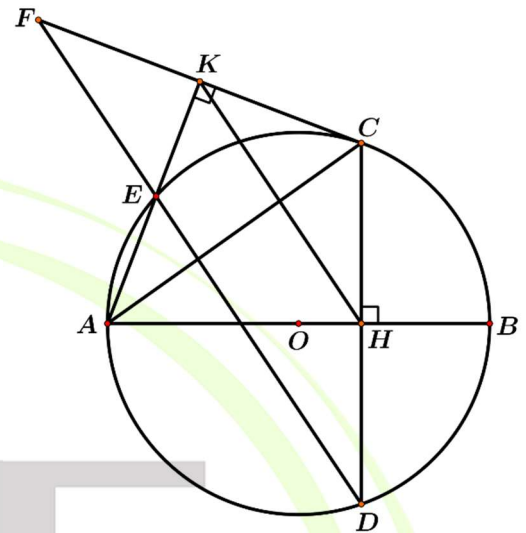
Hạ DG vuông $AF \Rightarrow S_{\Delta AFD} = \frac{1}{2} DG \cdot AF = \frac{1}{2} DG \cdot AD$, do

AD không đổi nên $S_{\Delta AFD}$ lớn nhất khi và chỉ khi DG lớn nhất.

Trong ΔAGD có: $GD \leq AD$

hay $S_{\Delta AFD} = \frac{1}{2} DG \cdot AF = \frac{1}{2} DG \cdot AD \leq \frac{1}{2} AD \cdot AD = \frac{1}{2} AD^2$

Dấu “bằng” xảy ra khi và chỉ khi $GD = AD$ tức G trùng A .



Khi đó $\widehat{DAF} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ADF$ vuông cân tại A $\Rightarrow \widehat{EBA} = \widehat{EDA} = 45^\circ$ (chắn $\widehat{AE}$ của (O))
hay E là điểm chính giữa cung AB.

Bài 5. (Đề tham khảo tuyển sinh lớp 10 sở Vĩnh Phúc năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Dây MN vuông góc với AB tại I , với $IA < IB$. Trên đoạn MI lấy điểm E (E khác M và I). Tia AE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K .

- Chứng minh rằng tứ giác $IEKB$ nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh rằng $\triangle AME \sim \triangle AKM$ và $AE \cdot AK + BI \cdot BA = 4R^2$.
- Tính độ dài đoạn thẳng OI theo R khi chu vi $\triangle MIO$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh rằng tứ giác $IEKB$ nội tiếp đường tròn

$\widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\Rightarrow \triangle EKB$ vuông tại K nên E, K, B thuộc đường tròn đường kính BE

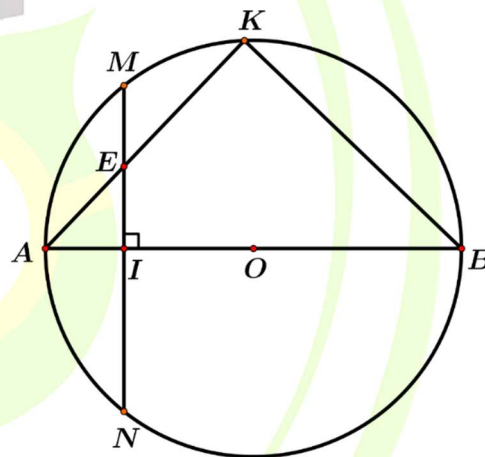
$\widehat{MIB} = 90^\circ$ (MN vuông AB tại I) $\Rightarrow \triangle EIB$ vuông tại I
nên E, I, B thuộc đường tròn đường kính BE

$\Rightarrow I, E, K, B$ cùng thuộc đường tròn đường kính BE.

Hay tứ giác $IEKB$ nội tiếp đường tròn đường kính BE (đpcm)

b) Chứng minh rằng $\triangle AME \sim \triangle AKM$ và $AE \cdot AK + BO \cdot BA = 4R^2$

Ta có: $OM = ON \Rightarrow \triangle OMN$ cân tại O mà OI là đường cao trong $\triangle OMN \Rightarrow OI$ là đường phân giác $\widehat{MON}$ nên $\widehat{MOA} = \widehat{AON}$



Lại có $\widehat{MKA} = \frac{1}{2}\widehat{MOA}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{AM}$)

$\widehat{AMN} = \frac{1}{2}\widehat{AON}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{AN}$)

$$\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{MKA}$$

Xét $\triangle AME$ và $\triangle AKM$ có: $\widehat{MAE}$ chung,
 $\widehat{MKA} = \widehat{AME}$ (cmt)

$$\Rightarrow \triangle AME \sim \triangle AKM (g.g) \text{ (đpcm)}$$

Xét $\triangle AEI$ vuông tại I và $\triangle AKB$ vuông tại K có: $\widehat{EAI}$ chung, $\widehat{AIE} = \widehat{AKB} (= 90^\circ)$

$$\Rightarrow \triangle AIE \sim \triangle AKB (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AI}{AK} \Rightarrow AE \cdot AK = AB \cdot AI$$

Theo đề bài: $AE \cdot AK + BI \cdot BA = AB \cdot AI + AB \cdot BI = AB(AI + BI) = AB \cdot AB = AB^2 = 4R^2$ (đpcm)

c) Tính độ dài đoạn thẳng OI theo R khi chu vi $\triangle MIO$ đạt giá trị lớn nhất.

Chu vi $\triangle MIO$ là $MI + IO + OM = MI + IO + R$ lớn nhất khi $MI + IO$ lớn nhất.

Áp dụng Định lý Pythagore xét $\triangle MIO$ vuông tại I có: $OM^2 = R^2 = OI^2 + MI^2$

Ta có:

$$(OI - MI)^2 \geq 0$$

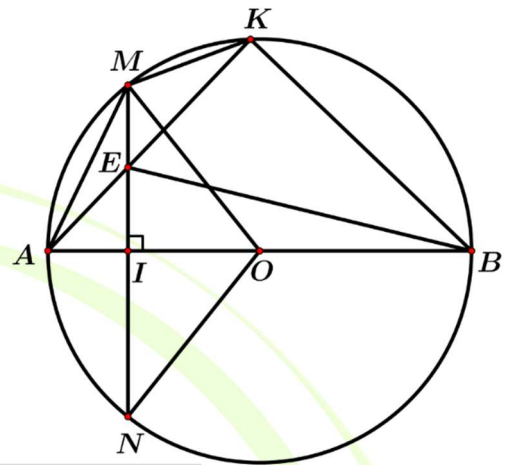
$$OI^2 - 2OI \cdot MI + MI^2 \geq 0$$

$$2OI^2 + 2MI^2 - (OI^2 + 2OI \cdot MI + MI^2) \geq 0$$

$$2(OI^2 + MI^2) - (OI + MI)^2 \geq 0$$

$$\text{Hay } (OI + MI)^2 \leq 2(OI^2 + MI^2) = 2OM^2 = 2R^2$$

Suy ra



$$OI + MI \leq \sqrt{2}.R$$

$$OI + MI + OM \leq (1 + \sqrt{2})R$$

Dấu “=” xảy ra khi $OI = MI = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Vậy chu vi ΔMIO lớn nhất bằng $R + R\sqrt{2}$ khi I thuộc đoạn thẳng AO và cách O một khoảng $OI = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ (đpcm)

Bài 6. (Đề tham khảo tuyển sinh lớp 10 sở Phú Thọ năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn (O, R) , một đường thẳng d cố định cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt, từ một điểm M thuộc đường thẳng d nằm bên ngoài đường tròn kẻ tiếp tuyến MC, MD tới đường tròn (C, D là tiếp điểm).

- Chứng minh bốn điểm M, C, O, D cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh OM vuông CD . Đoạn thẳng OM cắt đường tròn tại I . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD .
- Đường thẳng qua O và vuông góc với OM cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P và Q . Tìm vị trí của điểm M trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.

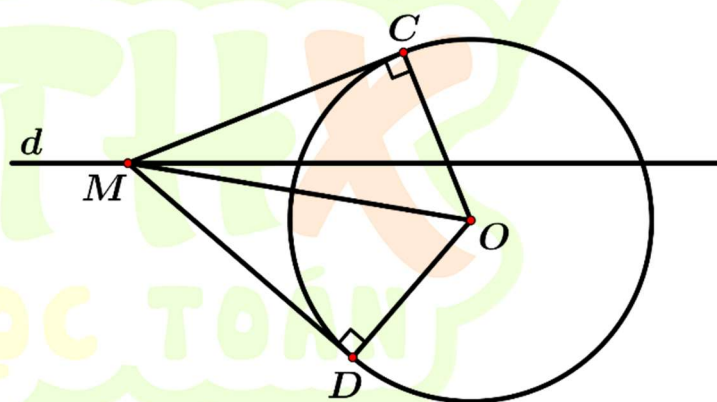
Hướng dẫn giải

- a) Chứng minh bốn điểm M, C, O, D cùng thuộc một đường tròn.**

$\widehat{MCO} = 90^\circ$ (MC là tiếp tuyến) $\Rightarrow \Delta MCO$ là tam giác vuông tại C nên M, C, O thuộc đường tròn đường kính MO .

$\widehat{MDO} = 90^\circ$ (MD là tiếp tuyến) $\Rightarrow \Delta MDO$ là tam giác vuông tại D nên M, D, O thuộc đường tròn đường kính MO .

$\Rightarrow$ 4 điểm M, C, O, D cùng thuộc đường tròn đường kính MO (đpcm)



b) Chứng minh: $OM \perp CD$. Đoạn thẳng OM cắt đường tròn tại I . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCD .

Ta có: $MC = MD$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên M cách đều C và D

$OC = OD$ ($= R$) nên O cách đều C và D

$\Rightarrow MO$ cách đều hai điểm C và $D \Rightarrow MO$ là đường trung trực của CD

$\Rightarrow MO \perp CD$ (đpcm)

Ta có: MO là phân giác của $\widehat{CMD}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

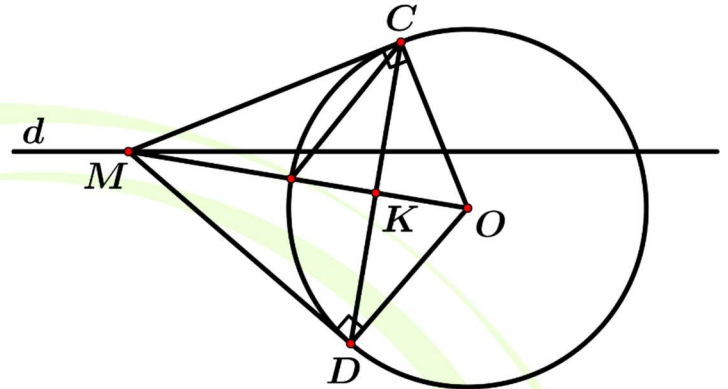
Xét ΔMOC vuông tại C có: $\widehat{MCI} + \widehat{ICO} = 90^\circ$ (1)

Gọi K là giao điểm của MO và CD . Xét ΔCKI vuông tại K có: $\widehat{ICK} + \widehat{CIK} = 90^\circ$ (2)

Mà $\widehat{ICO} = \widehat{CIO}$ (ΔOIC cân tại O) (3)

(1)(2)(3) $\Rightarrow \widehat{MCI} = \widehat{ICK} \Rightarrow CI$ là phân giác của $\widehat{MCD}$

Do I là giao điểm của hai đường phân giác MK và CI trong tam giác MCD nên I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCD (đpcm)



c) Đường thẳng qua O và vuông góc với OM cắt các tia MC , MD theo thứ tự tại P và Q . Tìm vị trí của điểm M trên đường thẳng d sao cho diện tích ΔMPQ nhỏ nhất.

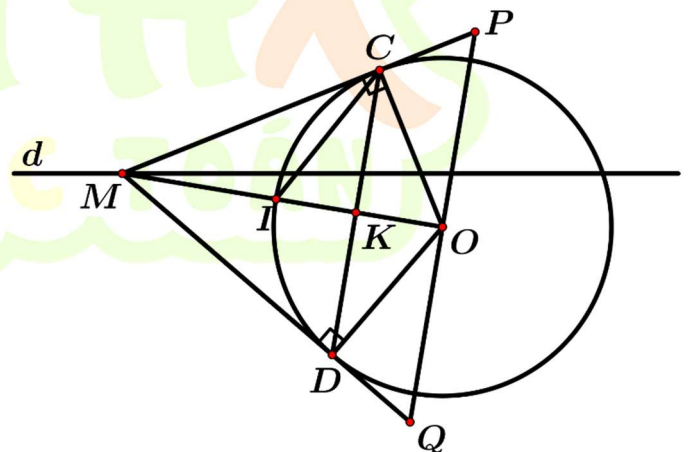
$$\begin{aligned} S_{\Delta MPQ} &= 2.S_{\Delta MOP} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} OC.MP = OC.MP = R.(MC + CP) \end{aligned}$$

$\Rightarrow S_{\Delta MPQ}$ nhỏ nhất khi $MC + CP$ nhỏ nhất.

$$\text{Ta có: } (MC - CP)^2 \geq 0$$

$$MC^2 - 2MC.CP + CP^2 \geq 0$$

$$(MC + CP)^2 \geq 4MC.CP (*)$$



Chúng minh được : $\widehat{PMO} = \widehat{COP}$ (cùng phụ $\widehat{MPO}$)

Xét $\triangle OCP$ và $\triangle MCO$ có: $\widehat{PMO} = \widehat{COP}$ (cmt), $\widehat{MOP} = \widehat{OCP} (= 90^\circ)$

$$\Rightarrow \triangle OCP \sim \triangle MCO (g.g) \Rightarrow \frac{OC}{MC} = \frac{CP}{OC} \Rightarrow MC \cdot CP = OC^2 = R^2 \quad (**)$$

Thay (**) vào (*) : $(MC + CP)^2 \geq 4R^2 \Rightarrow MC + CP \geq 2R$

Dấu "=" xảy ra khi $MC = CP = R \Rightarrow OM = R\sqrt{2}$

Vậy M là giao điểm của d và đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$.

