

ĐÁP ÁN CHUYÊN ĐỀ TUYỂN TẬP CÁC CÂU ĐIỂM 10 TRONG ĐỀ THI VÀO 10

Bài 1. (Đề khảo sát Toán 9 lần 2 năm 2024 – 2025 phòng GD&ĐT Sơn Tây – Hà Nội)

Một doanh nghiệp chuyên kinh doanh xe điện xanh Sài Gòn. Giá nhập vào một chiếc là 18 triệu đồng và bán ra với giá 22 triệu đồng một xe. Với giá bán như trên thì một năm số lượng xe bán được dự kiến là 500 chiếc. Để tăng thêm lượng tiêu thụ dòng xe này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước lượng cứ giảm 200 nghìn đồng một xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng 50 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải bán với giá bao nhiêu để sau khi giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ cao nhất?

Hướng dẫn giải

Gọi x là số lần giảm 200 nghìn đồng ($x > 0$)

Giá bán mới của loại xe đó là: $22 - 0,2x$ (triệu đồng)

Số lượng xe bán ra sau khi giảm giá là: $500 + 50x$ (xe)

Do đó lợi nhuận thu được là: $L = (22 - 0,2x - 18)(500 + 50x) = (4 - 0,2x)(500 + 50x)$ (triệu đồng)

Ta có: $L = -10x^2 + 100x + 2000 = -10(x - 10x + 25) + 2250 = -10(x - 5)^2 + 2250$

Do $(x - 5)^2 \geq 0$ nên $-10(x - 5)^2 \leq 0$

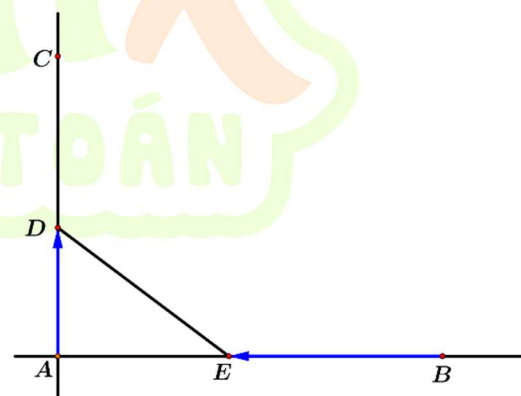
Khi đó $L \leq 2250$

Dấu “=” xảy ra khi $(x - 5)^2 = 0$ hay $x = 5$

Vậy doanh nghiệp cần bán với giá $22 - 0,2 \cdot 5 = 21$ triệu đồng.

Bài 2. (Đề minh họa tuyển sinh lớp 10 môn Toán năm 2025 – 2026 sở GD&ĐT Bà Rịa – Vũng Tàu)

Tại cùng một thời điểm, có hai người đang ở hai vị trí A và B cách nhau 1000 mét. Người thứ nhất ở vị trí B và đi về phía điểm A với vận tốc 2 m/s và người thứ hai ở vị trí A đi về phía điểm C với vận tốc 1,5 m/s. Biết rằng AB và AC vuông góc với nhau. Hãy cho biết sau bao nhiêu giây thì khoảng cách giữa hai người này nhỏ nhất?



Hướng dẫn giải

Gọi thời gian 2 người đi được là t (giây) ($t > 0$).

Sau t giây,

Người thứ nhất đi được một đoạn là $BE = 2t$ (m). Khi đó $AE = 1000 - 2t$ (m)

Người thứ hai đi được một đoạn là $AD = 1,5t$ (m)

Do đó khoảng cách giữa 2 người sau t giây là:

$$DE = \sqrt{(1,5t)^2 + (1000 - 2t)^2} = \sqrt{6,25t^2 - 4000t + 1\,000\,000}$$

Xét

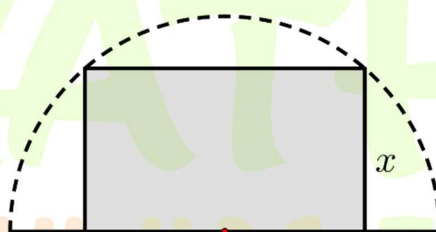
$$\begin{aligned} A &= 6,25t^2 - 4000t + 1\,000\,000 \\ &= \left[(2,5t)^2 - 2 \cdot (2,5t) \cdot 800 + 800^2 \right] + 360\,000 \\ &= (2,5t - 800)^2 + 360\,000 \\ &\geq 360\,000 \quad (\forall t > 0) \end{aligned}$$

Do đó $DE \geq \sqrt{360\,000} = 600$ khi $2,5t - 800 = 0$ hay $t = 320$ (tm)

Vậy khoảng cách giữa hai người nhỏ nhất là 600 mét sau 320 giây.

Bài 3. (Đề khảo sát Tháng 12 Trường THCS Trưng Vương – Hà Nội)

Từ một miếng tôn hình bán nguyệt có diện tích $\frac{\pi}{2} \text{ m}^2$, cần cắt bỏ phần tôn với tổng diện tích bao nhiêu mét vuông để thu được phần còn lại có dạng hình chữ nhật với diện tích lớn nhất?



Hướng dẫn giải

Do miếng tôn hình bán nguyệt có diện tích $\frac{\pi}{2} \text{ m}^2$ suy ra miếng tôn đó có bán kính 1 mét.

Gọi x (m, $x > 0$) là chiều dài cạnh của hình chữ nhật như hình vẽ.

Diện tích phần tôn hình chữ nhật còn lại là $S = 2x\sqrt{1 - x^2} \text{ (m}^2\text{)}$

Ta chứng minh BĐT Cauchy cho hai số thực không âm $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$

Thật vậy,

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0$$

Do $(a - b)^2 \geq 0$ luôn đúng với mọi a, b nên BĐT được chứng minh.

Dấu “=” xảy ra khi $a = b$.

Áp dụng kết quả trên cho hai số không âm x và $\sqrt{1 - x^2}$ ta được:

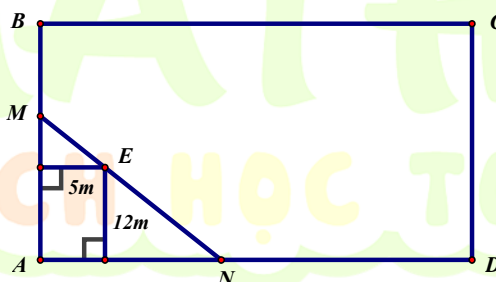
$$S = 2x\sqrt{1 - x^2} \leq x^2 + (1 - x^2) = 1.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \sqrt{1 - x^2}$ suy ra $2x^2 = 1$ hay $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (m)

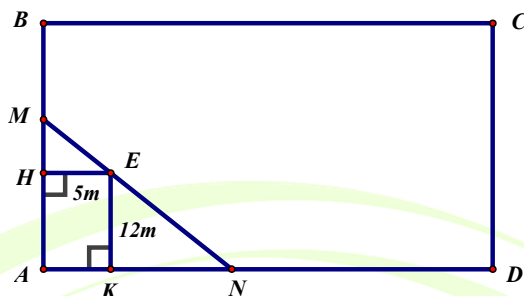
Như vậy cần cắt bỏ phần tôn với tổng diện tích $\frac{\pi}{2} - 1$ (m²).

Bài 4. (Đề khảo sát lần 1 Toán 9 năm 2024 – 2025 phòng GD&ĐT Bắc Từ Liêm – Hà Nội)

Nhà anh Thịnh có một cái ao nuôi cá hình chữ nhật ABCD (tham khảo hình vẽ), đợt này vừa có một loại cá giống mới nên anh đã giăng lưới quây lại để nuôi thử nghiệm trên một góc ao của mình. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí M ở bờ AB đến một vị trí N ở bờ AD và phải đi qua một cái cọc cố định đã cắm sẵn ở vị trí E. Biết rằng khoảng cách từ cọc E đến bờ AB, AD lần lượt là 5m và 12m. Hỏi diện tích nhỏ nhất của phần góc ao AMN mà anh Thịnh có thể quây được là bao nhiêu?



Hướng dẫn giải



Gọi khoảng cách từ E đến AB, AD lần lượt là EH, EK.

Đặt $KN = x(m)$, đk: $x > 0$

Vì $\triangle KEN \sim \triangle HME$ nên $\frac{KE}{HM} = \frac{KN}{HE} \Rightarrow \frac{12}{HM} = \frac{x}{5} \Rightarrow HM = \frac{60}{x}(m)$

$\triangle AMN$ vuông tại A nên

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(12 + \frac{60}{x}\right) \cdot (5 + x) = \left(6 + \frac{30}{x}\right) \cdot (5 + x) \\ &= 30 + 6x + \frac{150}{x} + 30 = 60 + 6x + \frac{150}{x} \end{aligned}$$

Chúng minh được $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b$.

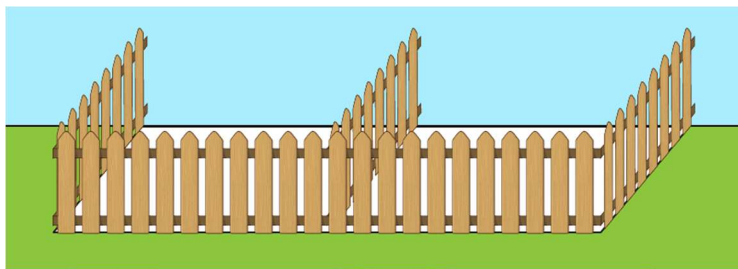
$$S_{AMN} = 60 + 6x + \frac{150}{x} \geq 60 + 2\sqrt{6x \cdot \frac{150}{x}} = 120$$

Dấu “=” xảy ra khi $6x = \frac{150}{x}$ hay $x = 5$ (TMĐK)

Vậy diện tích nhỏ nhất của phần góc ao AMN mà anh Thịnh có thể xây được là $120m^2$.

Bài 5. (Đề thi thử Toán tuyển sinh lớp 10 lần 1 năm 2025 sở GD&ĐT Bà Rịa – Vũng Tàu)

Một người nông dân có 24 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (hình vẽ). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí làm hàng rào là 100 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí làm hàng rào là 80 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Hướng dẫn giải

Gọi a (m) là chiều dài hàng rào song song với bờ sông, b (m) là chiều dài của một hàng rào vuông góc với bờ sông.

(ĐK: $a > 0; b > 0$)

Diện tích hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào là $S = a.b$ (m^2)

Chi phí làm hàng rào được tính là: $100\,000a + 3.b.80\,000 = 24\,000\,000$ hay $5a + 12b = 1200$

Chúng minh BĐT Cauchy cho hai số không âm $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = y$

Áp dụng kết quả trên cho hai số dương $5a$ và $12b$ ta được:

Ta có $5a + 12b \geq 2\sqrt{5a.12b}$ hay $1200 \geq 2\sqrt{60ab}$ suy ra $ab \leq 6000$ hay $S \leq 6000$.

Vậy diện tích lớn nhất của hai khu đất là $S = 6000(m^2)$ khi $\begin{cases} 5a = 12b \\ 5a + 12b = 1200 \end{cases}$ hay

$$\begin{cases} a = 120 \\ b = 50 \end{cases} \text{ (tm).}$$

Bài 6. (Đề KSCL Toán 9 năm 2024 – 2025 phòng GD&ĐT Ba Đình – Hà Nội)

Ông Long muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật, đáy bể là hình vuông, thể tích bể $13,5 m^3$. Giá tiền mua gạch để lát bắt đất và mặt xung quanh bể là $100\,000$ đồng/ m^2 . Hỏi ông Long nên xây bể có cạnh đáy là bao nhiêu để chi phí mua gạch là ít nhất?

Hướng dẫn giải

Gọi cạnh đáy của bể là a (m), chiều cao bể là h (m).

Vì thể tích bể là $13,5 m^3$ nên $a^2.h = 13,5$ hay $h = \frac{13,5}{a^2}$

Số tiền mua gạch để lát đáy bể là $100a^2$ (nghìn đồng)

Số tiền mua gạch để lát xung quanh bể là: $100.4ah = \frac{5400}{a}$ (nghìn đồng)

Tổng chi phí mua gạch là $T = 100a^2 + \frac{5400}{a}$ (nghìn đồng)

Ta chứng minh được BĐT Cauchy cho hai số thực không âm: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Ta có:

$$\begin{aligned} T &= 100a^2 + \frac{5400}{a} \\ &= (100a^2 - 600a + 900) + \left(\frac{5400}{a} + 600a \right) - 900 \\ &= 100(a - 3)^2 + \left(\frac{5400}{a} + 600a \right) - 900 \\ &\geq 0 + 2\sqrt{\frac{5400}{a} \cdot 600a} - 900 \\ &= 2700 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a - 3 = 0 \\ \frac{5400}{a} = 600a \end{cases}$ hay $a = 3$.

Cách 2:

$$\begin{aligned} T &= 100 \left(a^2 + \frac{54}{a} \right) \\ &= 100 \left(a^2 + 9 + \frac{54}{a} - 9 \right) \\ &\geq 100 \left(2\sqrt{a^2 \cdot 9} + \frac{54}{a} - 9 \right) \\ &= 100 \left(6a + \frac{54}{a} - 9 \right) \\ &\geq 100 \left(2\sqrt{6a \cdot \frac{54}{a}} - 9 \right) \\ &= 100 \left(2\sqrt{324} - 9 \right) = 2700 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} a = 3 \\ 6a = \frac{54}{a} \quad (**) \end{cases}$ hay $a = 3$.

Vậy ông Long cần xây bể có cạnh đáy là 3 m để chi phí mua gạch là thấp nhất.

Tìm điểm rơi trong bất đẳng thức Cauchy ở bài toán trên.

Cách 1: Tách $f(a) = 100(a-x)^2 + 200xa + \frac{5400}{a} - 100ax^2$

Ta dự đoán điểm rơi: $\begin{cases} a = x \\ 200xa = \frac{5400}{a} \quad (*) \end{cases}$

Thay $a = x$ vào $(*)$ ta tìm được $x = 3$.

Cách 2: Tách

$$\begin{aligned} f(a) &= 100 \left(a^2 + \frac{54}{a} \right) \\ &= 100 \left(a^2 + x^2 + \frac{54}{a} - x^2 \right) \\ &\geq 100 \left(2ax + \frac{54}{a} - x^2 \right) \\ &\geq 100 \left(2\sqrt{2ax \cdot \frac{54}{a}} - x^2 \right) \\ &= 100 \left(2\sqrt{108x} - x^2 \right) \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} a = x \\ 2ax = \frac{54}{a} \quad (**) \end{cases}$

Thay $a = x$ vào $(**)$ ta tìm được $x = 3$

Bài 7. (Đề khảo sát tháng 2 Trường THCS Nguyễn Trường Tộ - Hà Nội)

Xét các hình hộp chữ nhật có thể tích 27 cm^3 mà đáy là hình vuông cạnh a (cm) và chiều cao h (cm). Tìm hình hộp cho diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Thể tích hình hộp đã cho là $V = a^2 \cdot h = 27 \text{ (cm}^3\text{)}$ suy ra $h = \frac{27}{a^2} \text{ (cm)}$

Diện tích toàn phần của hình hộp đó là $S = 2a^2 + 4ah = 2a^2 + \frac{108}{a}$.

Ta có:

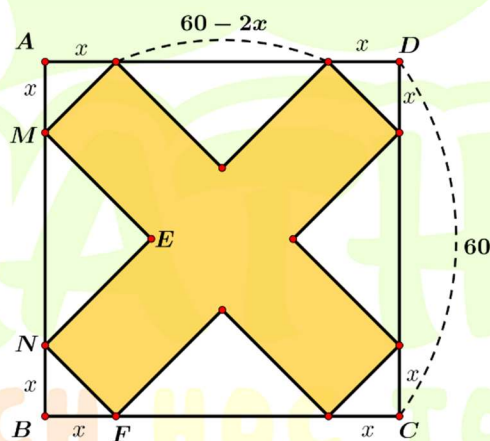
$$\begin{aligned} S &= 2a^2 + \frac{108}{a} \\ &= 2(a-3)^2 + 12a + \frac{108}{a} - 18 \\ &\geq 0 + 2\sqrt{12a \cdot \frac{108}{a}} - 18 \\ &= 54 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a=3 \\ 12a = \frac{108}{a} \end{cases}$ hay $a=3$.

Vậy hình hộp nhỏ nhất cần tìm là hình lập phương có cạnh là 3 cm.

Bài 8. (Đề thi thử lần 4 phòng GD&ĐT Chương Mỹ - Hà Nội)

Từ hình vuông có cạnh bằng 60 cm bạn Châu cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó bạn Châu gập thành hộp để đồ có dạng hình hộp chữ nhật không nắp. Tìm x để thể tích của khối hộp lớn nhất.



Hướng dẫn giải

Ta có $AM = BN = x$ suy ra $MN = AB - 2BN = 60 - 2x$

Xét $\triangle EMN$ vuông cân tại E: $EM^2 + EN^2 = MN^2$ (Pythagore)

Suy ra $2EN^2 = MN^2$ hay $EN = \frac{60-2x}{\sqrt{2}}$

Xét $\triangle BNF$ vuông cân tại B: $NF^2 = BN^2 + BF^2$ (Pythagore)

Suy ra $NF^2 = x^2 + x^2$ hay $NF = x\sqrt{2}$

Do đó hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh $NF = x\sqrt{2}$ và chiều cao là $EN = \frac{60-2x}{\sqrt{2}}$

Suy ra thể tích của hình hộp chữ nhật là:

$$V = NF^2 \cdot EN = 2x^2 \cdot \frac{60-2x}{\sqrt{2}} = 2x \cdot x \cdot \frac{60-2x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot x \cdot x \cdot (60-2x)$$

Chúng minh BĐT Cauchy cho 3 số dương $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Áp dụng kết quả đó cho ba số dương $x, x, (60-2x)$ ta có:

$$\sqrt{2} \cdot x \cdot x \cdot (60-2x) \leq \sqrt{2} \left(\frac{x+x+60-2x}{3} \right)^3 = 8000\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 60-2x$ hay $x = 20$ (tm)

Vậy thể tích của hình hộp lớn nhất bằng $V = 8000\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$ khi $x = 20 \text{ cm}$.

Bài 9. (Đề tham khảo tuyển sinh lớp 10 năm 2025 – 2026 sở GD&ĐT Phú Thọ)

Giải phương trình $8x^2 - 21x + 49 = 11\sqrt{x^3 - 4x + 15}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$x^3 - 4x + 15 = x^3 - 9x + 5x + 15 = x(x-3)(x+3) + 5(x+3) = (x+3)(x^2 - 3x + 5)$$

$$\text{ĐKXĐ: } x^3 - 4x + 15 \geq 0 \text{ hay } (x+3) \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{11}{4} \right] \geq 0 \text{ do đó } x \geq -3$$

Ta có:

$$8x^2 - 21x + 49 = 11\sqrt{x^3 - 4x + 15}$$

$$8(x^2 - 3x + 5) - 11\sqrt{(x+3)(x^2 - 3x + 5)} + 3(x+3) = 0 \quad (*)$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = a$ và $\sqrt{x + 3} = b$ ($a > 0, b \geq 0$)

Từ (*) ta có:

$$8a^2 - 11ab + 3b^2 = 0$$

$$8a^2 - 8ab - 3ab + 3b^2 = 0$$

$$(a - b)(8a - 3b) = 0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = b \\ 8a = 3b \end{cases}$$

Với $a = b$ thì $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = \sqrt{x + 3}$

$$x^2 - 3x + 5 = x + 3$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Với $8a = 3b$ thì $8\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3\sqrt{x + 3}$

$$\text{Hay } \begin{cases} x \geq -3 \\ 64x^2 - 201x + 293 = 0 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2 + \sqrt{2}$ và $x = 2 - \sqrt{2}$.

Bài 10. (Đề tham khảo tuyển sinh lớp 10 năm 2025 – 2026 sở GD&ĐT Vĩnh Phúc)

Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn các điều kiện $a \geq b \geq c$; $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + b$.

Hướng dẫn giải

Từ $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ và $c = -a - b$ suy ra

$$a^2 + b^2 + (-a - b)^2 = 6 \text{ hay } a^2 + b^2 + ab = 3 \quad (1)$$

Do $a \geq b \geq c$ nên $a + 2b \geq a + b + c = 0$ và $b + 2a \geq a + b + c = 0$

$$\text{Suy ra } (a + 2b)(b + 2a) \geq 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(a^2 + b^2 + ab) + (a + 2b)(b + 2a) \geq 3$

$$\text{Do đó } (a + b)^2 \geq 1$$

Suy ra $a + b \geq 1$ hoặc $a + b \leq -1$

Nếu $a + b \leq -1$ thì $c \geq 1 > 0 > a + b$ (mâu thuẫn)

Suy ra $a + b \geq 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a + b = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a = 2 \\ b = c = -1 \end{cases}$ (thoả mãn)

hoặc $\begin{cases} a + b = 1 \\ b + 2a = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$ (loại)

Vậy GTNN của P bằng 1 khi $a = 2; b = c = -1$.

Bài 11. (Đề khảo sát Toán tuyển sinh lớp 10 năm 2025 – 2026 phòng GD&ĐT Tiền Hải – Thái Bình)

Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh $\frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2} \geq \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chứng minh BĐT AM -GM cho hai số dương.

Theo bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương, ta có:

$$\frac{a}{1+9b^2} = \frac{a(1+9b^2) - 9ab^2}{1+9b^2} = a - \frac{9ab^2}{1+9b^2} \geq a - \frac{9ab^2}{2\sqrt{1 \cdot 9b^2}} = a - \frac{3}{2}ab.$$

$$\text{Tương tự } \frac{b}{1+9c^2} \geq b - \frac{3}{2}bc, \quad \frac{c}{1+9a^2} \geq c - \frac{3}{2}ca.$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2} \geq a + b + c - \frac{3}{2}(ab + bc + ca).$$

$$\text{Vì } ab + bc + ca \leq \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{suy ra } 3(ab + bc + ca) \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{hay } ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3}$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2} \geq a + b + c - \frac{1}{2}(a + b + c)^2 = \frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.