

ĐÁP ÁN CHUYÊN ĐỀ
TUYỂN TẬP BÀI HÌNH HỌC PHẪNG TRONG CÁC ĐỀ THI

Câu 1. (Quận Ba Đình – Đống Đa – Hà Nội)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Kẻ các đường cao BE và CF của tam giác ABC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của E trên AB và BC. Chứng minh:

- a) Các tứ giác BHEK, BFEC là các tứ giác nội tiếp.
- b) $BH.BA = BK.BC$
- c) HK đi qua trung điểm EF.

Hướng dẫn giải

a) Các tứ giác BHEK, BFEC là các tứ giác nội tiếp

Ta có: H là hình chiếu của E trên AB nên $\triangle EHB$ vuông tại H $\Rightarrow H, E, B$ cùng thuộc đường tròn đường kính BE

K là hình chiếu của E trên BC nên $\triangle BEK$ vuông tại K $\Rightarrow B, E, K$ cùng thuộc đường tròn đường kính BE

$\Rightarrow$ 4 điểm H, E, B, K cùng thuộc đường tròn đường kính BE hay tứ giác BHEK nội tiếp đường tròn đường kính BE (đpcm)

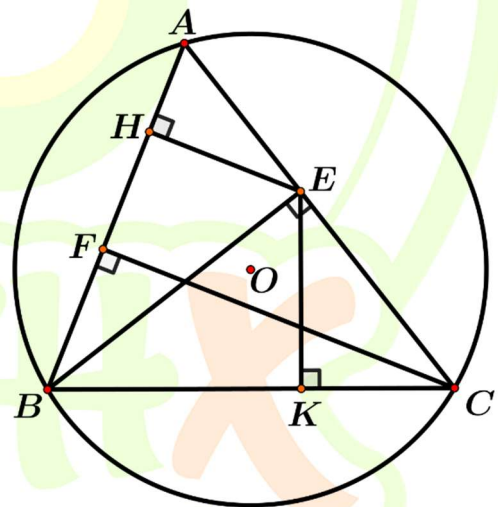
Lại có: CF là đường cao nên $\triangle BFC$ vuông tại F $\Rightarrow B, F, C$ thuộc đường tròn đường kính BC

BE là đường cao nên $\triangle BEC$ vuông tại E $\Rightarrow B, E, C$ thuộc đường tròn đường kính BC.

Suy ra: 4 điểm B, F, C, E cùng thuộc đường tròn đường kính BC hay tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn đường kính BC (đpcm)

b) $BH.BA = BK.BC$

Do tứ giác BHEK nội tiếp nên $\widehat{BHK} = \widehat{BEK}$ (cùng chắn $\widehat{BK}$)



Ta có: $\widehat{BEK} + \widehat{KEC} = 90^\circ$

Mà $\widehat{KEC} + \widehat{ECK} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BEK} = \widehat{ECK}$ (cùng phụ với $\widehat{KEC}$)

$\Rightarrow \widehat{BHK} = \widehat{ECK}$

Xét $\triangle BHK$ và $\triangle BCA$ có : $\hat{B}$ chung , $\widehat{BHK} = \widehat{ECK}$

$\Rightarrow \triangle BHK \sim \triangle BCA$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BK}{BA}$ (tỉ số đồng dạng)

$\Rightarrow BH.BA = BK.BC$ (đpcm)

c) HK đi qua trung điểm EF

Gọi I trung điểm EF, kẻ EJ vuông FC tại J.

Xét tứ giác HEJF có 3 góc vuông nên tứ giác HEJF là hình chữ nhật

$\Rightarrow$ HEJF là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm I.

$\Rightarrow \widehat{HFE} = \widehat{HJE}$ (cùng chắn $\widehat{HE}$) (1)

Ta có tứ giác BFEC nội tiếp nên $\widehat{ECB} + \widehat{BFE} = 180^\circ$ (tính chất tứ giác nội tiếp) mà $\widehat{BFE} + \widehat{EFA} = 180^\circ$ (góc bẹt) $\Rightarrow \widehat{HFE} = \widehat{ECB}$ (cùng bù $\widehat{EFB}$) (2)

(1)(2) $\Rightarrow \widehat{HJE} = \widehat{ECB}$

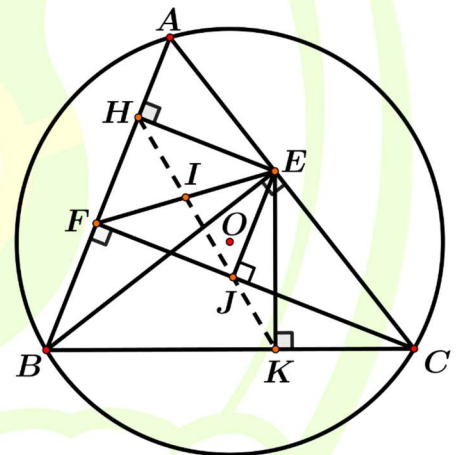
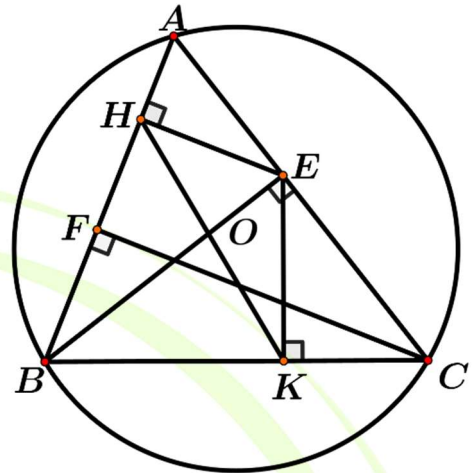
Xét tứ giác JKCE có :

$\triangle EJC$ vuông tại J nên E, J, C thuộc đường tròn đường kính EC

$\triangle EKC$ vuông tại K nên E, K, C thuộc đường tròn đường kính EC

$\Rightarrow$ Tứ giác JKCE nội tiếp đường tròn đường kính EC

$\Rightarrow \widehat{KCE} + \widehat{KJE} = 180^\circ$ (tính chất tứ giác nội tiếp)



Mà $\widehat{KCE} = \widehat{HJE}$ (cmt)

Nên $\widehat{HJE} + \widehat{EJK} = 180^\circ$ (góc bẹt) $\Rightarrow$ H, I, J, K thẳng hàng (đpcm)

Câu 2: (Trích đề KSCL lần 1 THCS Cát Quế B – Hà Nội)

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC (D, E, F là chân các đường cao) cắt nhau tại điểm H. Kẻ đường kính AK của đường tròn $(O; R)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AK.

- Chứng minh: Tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh: Tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC.
- Chứng minh: MD song song với BK.

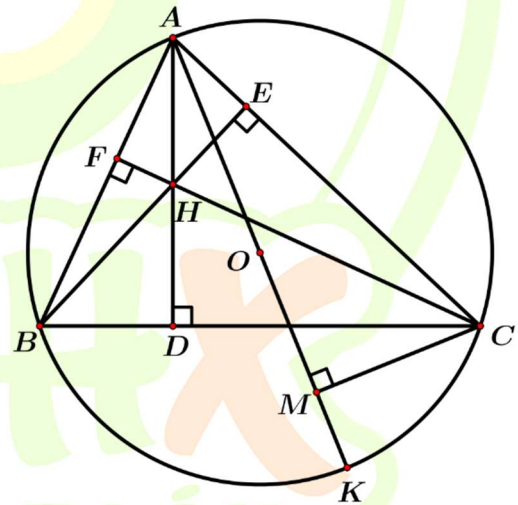
Hướng dẫn giải

a) Chứng minh: Tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn.

Ta có: $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (BE là đường cao của $\triangle ABC$)
nên $\triangle BEC$ vuông tại E $\Rightarrow B, E, C$ cùng thuộc
đường tròn đường kính BC

$\widehat{BFC} = 90^\circ$ (CF là đường cao của $\triangle ABC$) nên
 $\triangle BFC$ vuông tại F $\Rightarrow B, F, C$ cùng thuộc đường
tròn đường kính BC.

Do đó: B, F, E, C cùng thuộc đường tròn đường
kính BC hay tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn.
(đpcm)



b) Chứng minh: Tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AKC$ có: $\widehat{ADB} = \widehat{ACK} (= 90^\circ)$,

$\widehat{ABD} = \widehat{ACK}$ (cùng chắn $\widehat{AC}$)

$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AKC$ (g.g) (đpcm)

c) Chứng minh: MD song song với BK.

Ta có: $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (AD là đường cao) nên $\triangle ADC$ vuông tại D $\Rightarrow A, D, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính AC

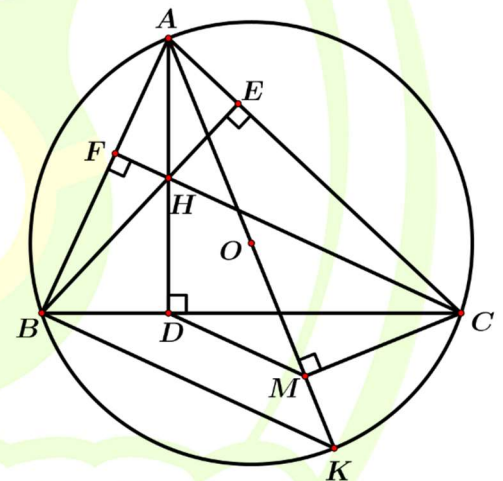
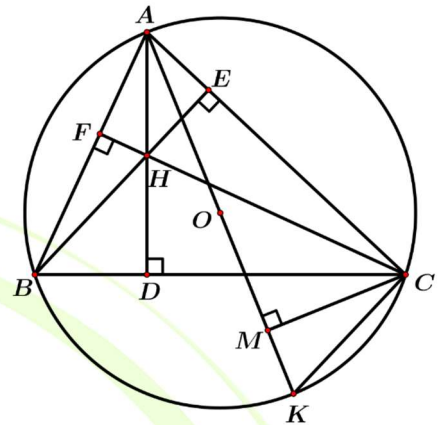
$\widehat{AMC} = 90^\circ$ (M là hình chiếu của C trên AK) nên $\triangle AMC$ vuông tại M $\Rightarrow A, M, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính AC

Do đó: 4 điểm A, M, C, D cùng thuộc đường tròn đường kính AC hay tứ giác ADMC nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ACD}$ (cùng chắn cung $\widehat{AD}$)

Mà $\widehat{ACD} = \widehat{AKB}$ (cùng chắn cung $\widehat{AB}$)

Nên $\widehat{AMD} = \widehat{AKB}$ (vị trí đồng vị) $\Rightarrow DM \parallel BK$ (đpcm)



Câu 3: (Đề thi thử vào 10 THCS Thọ Lộc)

Cho đường tròn tâm (O;R) đường kính PQ. Gọi D là trung điểm của đoạn OQ, từ D kẻ dây AB của đường tròn (O) vuông góc với đường kính PQ. Lấy M là một điểm bất kì trên cung nhỏ AP, dây MQ cắt dây AB tại I.

a) Chứng minh bốn điểm D, I, M, P cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh : $QI \cdot QM = QB^2$ và tính góc APB

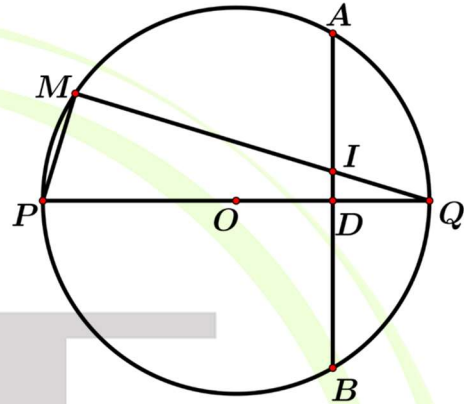
c) Gọi C là điểm nằm trên dây MB sao cho $AM = CM$. Xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ AP để tổng $S = MP + MA$ có giá trị lớn nhất.

*Hướng dẫn giải***a) Chứng minh bốn điểm D, I, M, P cùng nằm trên một đường tròn**

Ta có : $\widehat{PMQ} = 90^\circ$ (chắn đường kính PQ) nên
 $\triangle PMI$ vuông tại M $\Rightarrow P, M, I$ thuộc đường tròn
đường kính PI

$\widehat{IDP} = 90^\circ$ ($AB \perp PQ$ tại D) nên $\triangle PDI$ vuông tại D
 $\Rightarrow P, D, I$ thuộc đường tròn đường kính PI

Do đó 4 điểm P, M, I, D cùng thuộc đường tròn
đường kính PI (đpcm)

**b) Chứng minh : $QI \cdot QM = QB^2$ và $\widehat{APB} = ?$**

Xét $\triangle QDI$ và $\triangle QMP$ có $\widehat{DQI}$ chung, $\widehat{QDI} = \widehat{QMP} (= 90^\circ) \Rightarrow \triangle QDI \sim \triangle QMP$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{QD}{QM} = \frac{QI}{QP} \Rightarrow QM \cdot QI = QD \cdot QP$$

$$\text{Mà } QD = \frac{1}{2}QO ; QP = 2QO$$

$$\Rightarrow QM \cdot QI = \frac{1}{2}QO \cdot 2QO = QO^2 \quad (1)$$

Xét $\triangle ODB$ vuông tại D có:

$$\cos \widehat{BOD} = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BOD} = 60^\circ$$

Mà $OQ = OB \Rightarrow \triangle OQB$ là tam giác đều

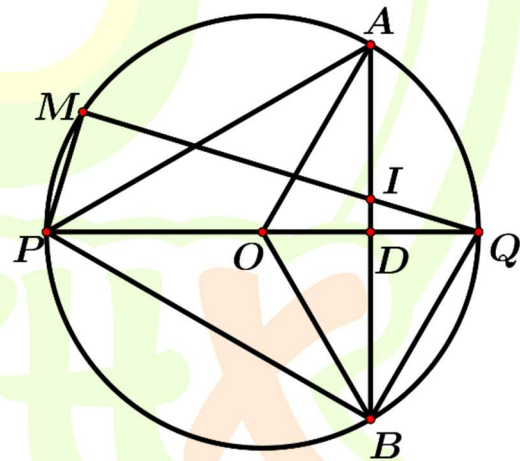
$$\Rightarrow QO = QB \quad (2)$$

$$(1)(2) \Rightarrow QM \cdot QI = QB^2 \quad (\text{đpcm})$$

Xét $\triangle OAB$ cân tại O có OD là trung tuyến nên OD đồng thời là đường phân giác

$$\Rightarrow \widehat{BOD} = \widehat{DOA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{BOD} + \widehat{DOA} = 120^\circ \quad (\text{góc ở tâm chắn } \widehat{AB})$$

Mà $\widehat{APB}$ là góc nội tiếp chắn $\widehat{AB}$



$$\Rightarrow \widehat{APB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 60^\circ \text{ (đpcm)}$$

c) Gọi C là điểm nằm trên dây MB sao cho $AM = CN$. Xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ AP để tổng $S = MP + MA$ có giá trị lớn nhất.

Ta có: OD là trung trực của AB mà OD nằm trên PQ nên PD đồng thời là trung trực của AB $\Rightarrow \triangle PAB$ cân tại P có $\widehat{APB} = 60^\circ$ nên $\triangle PAB$ là tam giác đều

$$\Rightarrow PA = AB \quad (3)$$

Theo đề bài: $MA = MC$ nên $\triangle AMC$ cân tại M

$$\text{Mà } \widehat{AMB} = \widehat{APB} = 60^\circ \text{ (Cùng chắn } \widehat{AB})$$

$$\Rightarrow \triangle AMC \text{ đều} \Rightarrow MA = AC \quad (4)$$

$$\text{Lại có: } \widehat{MAP} + \widehat{PAC} = 60^\circ$$

$$\widehat{PAC} + \widehat{CAB} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MAP} = \widehat{CAB} \quad (5)$$

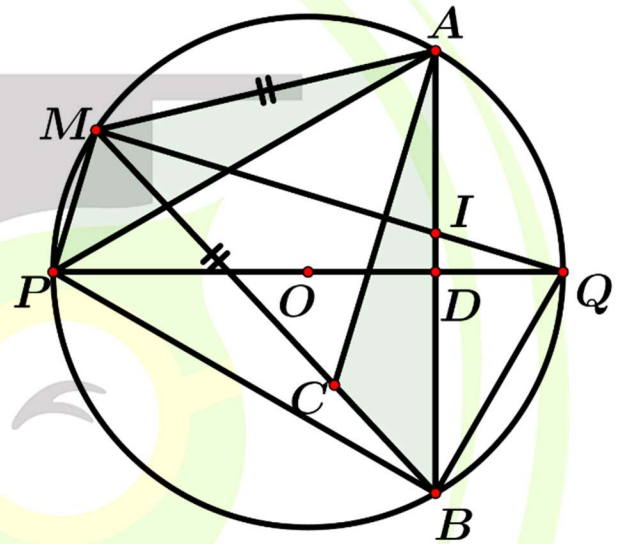
Từ (3)(4)(5) Xét $\triangle MAP$ và $\triangle CAB$ có: $MA = AC$; $AP = AB$; $\widehat{MAP} = \widehat{CAB}$

$$\Rightarrow \triangle MAP = \triangle CAB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MP = BC \text{ (cặp cạnh tương ứng)}$$

Theo đề bài: $S = MP + MA$ mà $MP = CB$, $MA = MC$

$$\text{Nên } S = CB + CM = MB$$

Để S có giá trị lớn nhất thì MB phải lớn nhất, do MB là dây cung nên MB lớn nhất khi MB là đường kính (O;R) hay M là điểm trên $\widehat{AP}$ và M đối xứng với B qua O.



Câu 4: (Đề khảo sát vào 10 Yên Định – Thanh Hóa)

Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định không đi qua O, lấy điểm A trên cung lớn BC. Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H (D thuộc BC, E thuộc AC, F thuộc AB)

- Chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp
- Chứng minh $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$.
- Tìm vị trí của điểm A trên cung lớn BC để diện tích tam giác AHE lớn nhất.

Hướng dẫn giải**a) Chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp**

Gọi I là trung điểm AH.

Ta có: $\widehat{BEA} = 90^\circ$ (BE là đường cao) $\Rightarrow \triangle AEH$

vuông tại E $\Rightarrow A, E, H$ thuộc đường tròn $\left(I; \frac{AH}{2}\right)$

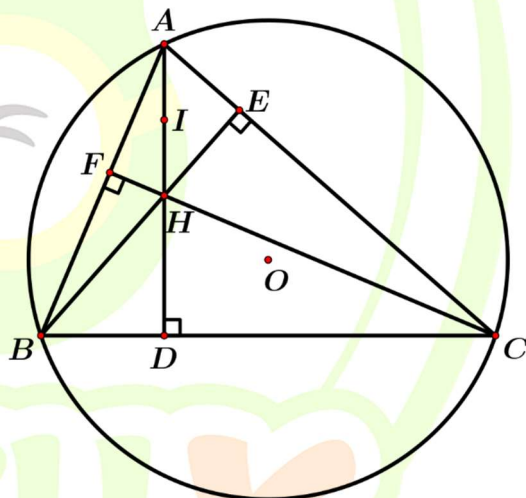
$\widehat{CFA} = 90^\circ$ (CF là đường cao) $\Rightarrow \triangle AFH$ vuông tại

F $\Rightarrow A, F, H$ thuộc đường tròn $\left(I; \frac{AH}{2}\right)$

Suy ra 4 điểm A, E, G, F cùng thuộc đường tròn

$\left(I; \frac{AH}{2}\right)$

Hay tứ giác HFAE nội tiếp đường tròn $\left(I; \frac{AH}{2}\right)$ (đpcm).



b) Chứng minh $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$.

Xét $\triangle BDH$ và $\triangle BEC$ có: $\widehat{DBH}$ chung,
 $\widehat{BDH} = \widehat{BEC} (= 90^\circ)$

$\triangle BDH \sim \triangle BEC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH \cdot BE = BD \cdot BC \quad (1)$$

Xét $\triangle CDH$ và $\triangle CFB$ có: $\widehat{DCH}$ chung,
 $\widehat{CDH} = \widehat{CFB} (= 90^\circ)$

$\triangle CDH \sim \triangle CFB$ (g.g)

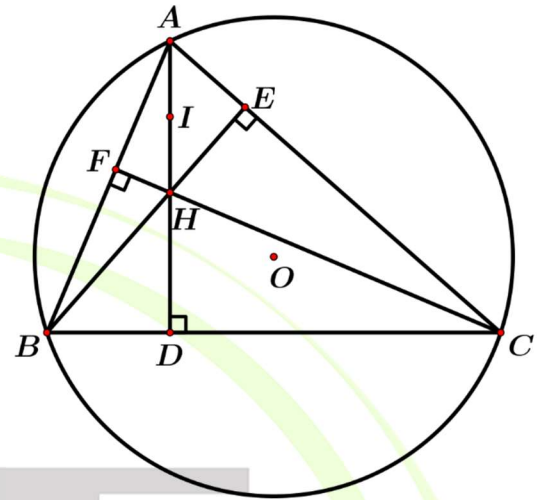
$$\Rightarrow \frac{CD}{CF} = \frac{CH}{CB} \Rightarrow CH \cdot CF = CD \cdot CB \quad (2)$$

Lấy (1) + (2) ta được: $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BD \cdot BC + CD \cdot CB$

$$BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC(BD + CD)$$

$$BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC \cdot BC$$

$$BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2 \text{ (đpcm)}$$

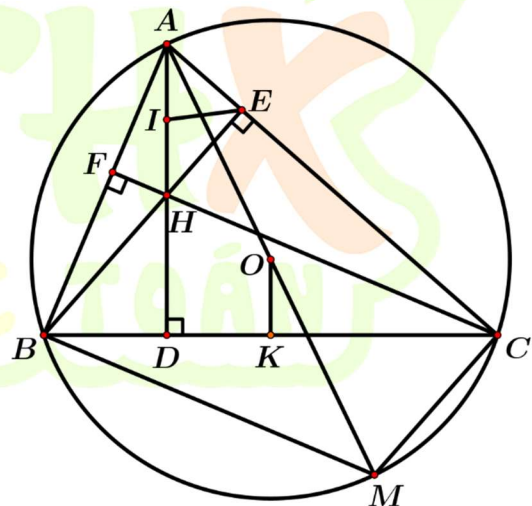
**c) Tìm vị trí của điểm A trên cung lớn BC để diện tích tam giác AHE lớn nhất.**

Dựng AM là đường kính của (O), dựng EJ vuông góc với AH, gọi K là trung điểm của BC.

Ta có: $MC \perp AC$ (chắn đường kính AM);
 $BE \perp AC$ (gt) $\Rightarrow BH \parallel MC$ (định lý từ vuông góc đến song song)

$BM \perp BA$ (chắn đường kính AM); $CF \perp AB$ (gt) $\Rightarrow CH \parallel BM$ (định lý từ vuông góc đến song song)

Xét tứ giác BHCM có: $CH \parallel BM$, $BH \parallel MC$
 nên tứ giác BHCM là hình bình hành.



Mà K là trung điểm BC (cách dựng) nên K là trung điểm HM

Xét $\triangle MAH$ có: O trung điểm AM, K là trung điểm HM $\Rightarrow OK$ là đường trung bình

trong $\triangle MAH \Rightarrow OK = \frac{1}{2}AH$ (3)

Lại có: $S_{\triangle AEH} = \frac{1}{2}AH.EJ \leq \frac{1}{2}AH.EI = \frac{1}{4}AH^2$ (4)

(3)(4) $\Rightarrow S_{\triangle AEH} \leq \frac{1}{4}AH^2 = \frac{1}{4}(2OK)^2 = OK^2$ (OK không đổi)

Dấu “=” xảy ra khi $JE = IE$ tức là I trùng J $\Rightarrow EJ$ vừa là đường cao vừa là trung tuyến

$\Rightarrow \triangle AEH$ vuông cân tại E $\Rightarrow \widehat{EAH} = 45^\circ$

Xét $\triangle$ vuông ADC có: $\widehat{ACD} = 90^\circ - \widehat{DAC} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

Vậy $S_{\triangle AEH}$ lớn nhất khi A ở vị trí tạo với BC một góc $\widehat{BCA} = 45^\circ$ (đpcm)

MATHX
THÍCH HỌC TOÁN