

**ĐÁP ÁN CHUYÊN ĐỀ**  
**RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ CÁC DẠNG BÀI TẬP LIÊN QUAN**

**Bài 1.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ .

- 1) Tính giá trị của biểu thức A tại  $x = 121$ ;
- 2) Cho  $M = A + B$ . Rút gọn biểu thức M;
- 3) Tìm giá trị của x để  $M = \sqrt{x} - 1$ .

*Hướng dẫn giải*

1) Với  $x = 121$  (TMĐK) ta có  $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{121}+1}{\sqrt{121}-1} = \frac{6}{5}$ .

2) Với  $x \geq 0; x \neq 1$  ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

3) Để  $M = \sqrt{x} - 1$  thì  $\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - 1$

Ta có  $\sqrt{x} + 1 > 0$  với mọi x nên

$$2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$$

$$x - 2\sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (tmdk)}$$

Vậy với  $x \in \{0; 4\}$  thì  $M = \sqrt{x} - 1$ .

**Bài 2.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{x-9}{x-3\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{x+3}{x-9} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}+3}$  với  $x > 0; x \neq 9$ .

1) Tính giá trị của A khi  $x = 16$ ;

2) Chứng minh rằng  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$ ;

3) Đặt  $P = A.B$ . Tìm các giá trị nguyên của x để  $P < 1$ .

*Hướng dẫn giải*

1) Với  $x = 16$  (TMĐK) ta có  $A = \frac{x-9}{x-3\sqrt{x}} = \frac{16-9}{16-3\sqrt{16}} = \frac{7}{4}$ .

2) Với  $x > 0; x \neq 9$  ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{x+3}{x-9} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{x+3}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{x+3}{x-9} + \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x+3+\sqrt{x}+3+2\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

$$3) \text{ Ta có } P = A.B = \frac{x-9}{x-3\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$$

Để  $P < 1$  thì  $\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} < 1$  hay

$$\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - 1 < 0$$

$$\frac{6}{\sqrt{x}-3} < 0$$

Do  $6 > 0$  nên để  $\frac{6}{\sqrt{x}-3} < 0$  thì  $\sqrt{x}-3 < 0$  hay  $x < 9$

Kết hợp với điều kiện đề bài ta được  $0 < x < 9$

Vậy  $0 < x < 9$  thì  $P < 1$ .

**Bài 3.** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$  và  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$  với  $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$ .

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 100$ ;
- 2) Rút gọn biểu thức B;
- 3) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức  $M = A : B$  có giá trị nguyên.

*Hướng dẫn giải*

1) Với  $x = 100$  (TMĐK) ta được  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{100}-2} = \frac{5}{4}$ .

2) Với  $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$  ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - x - 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

$$3) \text{ Ta có: } M = A : B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-2}$$

TH1:  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $x$  không là số chính phương  $\Rightarrow \sqrt{x} \in I \Rightarrow M \in I$  (Không thỏa mãn đề bài)

TH2:  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $x$  là số chính phương  $\Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Z}$

Để  $M$  nguyên thì  $\sqrt{x}-2 \in U(5)$  hay  $\sqrt{x}-2 \in \{-5; -1; 1; 5\}$

$\sqrt{x}-2$	-5	-1	1	5
$x$	VN	1	9 (loại)	49

Kết hợp với điều kiện đề bài được  $x \in \{1; 49\}$  thì  $M$  có giá trị nguyên.

**Bài 4.** Cho hai biểu thức  $A = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$  với

$x > 0$ ,  $x \neq 1$ .

- 1) Tính giá trị của  $A$  khi  $x = 4$ ;
- 2) Rút gọn biểu thức  $P = B \cdot A$ ;
- 3) Tìm các giá trị của  $x$  để  $P$  nhận giá trị nguyên.

*Hướng dẫn giải*

1) Với  $x = 4$  (TMĐK) ta có  $A = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

2) Với  $x > 0$ ;  $x \neq 1$  ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left[ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \right] \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \left[ \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+3) + 3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \right] \cdot \left( \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \left[ \frac{x - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \right] \cdot \left( \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

3) Ta có  $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+3} < 1$  với mọi  $x > 0$ .

Với  $x > 0$  ta có  $\sqrt{x}+3 > 3$

Do đó  $\frac{5}{\sqrt{x}+3} < \frac{5}{3}$  suy ra  $P > 1 - \frac{5}{3}$  hay  $P > -\frac{2}{3}$ .

Để P nguyên mà  $-\frac{2}{3} < P < 1$  nên  $P = 0$ .

Khi đó

$$\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = 0$$

$$\sqrt{x}-2 = 0 \quad (\sqrt{x}+3 > 0)$$

$$x = 4 \text{ (tm)}$$

Vậy với  $x = 4$  thì P nhận giá trị nguyên.

**Bài 5.** Cho hai biểu thức  $N = \frac{24}{\sqrt{x}+6}$  và  $M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6} + \frac{1}{\sqrt{x}-6} + \frac{17\sqrt{x}+30}{x-36}$  với

$x \geq 0, x \neq 36$ .

- 1) Tính giá trị của biểu thức N khi  $x = 9$ ;
- 2) Rút gọn biểu thức M;
- 3) Tìm số nguyên x để biểu thức  $L = N.M$  có giá trị nguyên lớn nhất.

*Hướng dẫn giải*

1) Với  $x = 9$  (TMĐK) ta có  $N = \frac{24}{\sqrt{x}+6} = \frac{24}{\sqrt{9}+6} = \frac{8}{3}$ .

2) Với  $x \geq 0; x \neq 36$  ta có:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6} + \frac{1}{\sqrt{x}-6} + \frac{17\sqrt{x}+30}{x-36} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-6) + (\sqrt{x}+6) + 17\sqrt{x}+30}{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-6)} \\
 &= \frac{x-6\sqrt{x}+\sqrt{x}+6+17\sqrt{x}+30}{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-6)} = \frac{x+12\sqrt{x}+36}{(\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}+6)} = \frac{(\sqrt{x}+6)^2}{(\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}+6)} = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-6}
 \end{aligned}$$

$$3) \text{ Ta có } L = N.M = \frac{24}{\sqrt{x}+6} \cdot \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-6} = \frac{24}{\sqrt{x}-6}$$

Ta có  $\sqrt{x}-6 \geq -6$  với mọi  $x$  nên để  $L$  đạt giá trị nguyên thì  $\sqrt{x}-6 \in U(24)$  hay  $\sqrt{x}-6 \in \{-6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

$\sqrt{x}-6$	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	8	12	24
$x$	0	4	9	16	25	49	64	81	100	144	196	324	900
$L$	-4	-6	-8	-12	-24	24	12	8	6	4	3	2	1

Từ bảng trên, với  $x=49$  thì  $L=24$  là giá trị nguyên lớn nhất.

Vậy  $x=49$  thì  $L$  đạt giá trị nguyên lớn nhất.

**Bài 6.** Cho hai biểu thức  $A = \frac{3\sqrt{x}-9}{x-4}$  và  $B = \frac{x+1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$

$$(x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9)$$

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x=1$ ;

2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ ;

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = A.B$ .

*Hướng dẫn giải*

1) Với  $x=1$  (TMĐK) ta được  $A = \frac{3\sqrt{x}-9}{x-4} = \frac{3\sqrt{1}-9}{1-4} = 2$

2) Với  $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$  ta có:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{x+1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \\
 &= \frac{x+1+(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} \\
 &= \frac{x+1+x-9-x+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}
 \end{aligned}$$

$$3) \text{ Ta có } P = A.B = \frac{3\sqrt{x}-9}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = \frac{3(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$$

Để P đạt giá trị lớn nhất thì  $\sqrt{x}+2$  nhỏ nhất.

Ta có  $\sqrt{x}+2 \geq 2$  với mọi  $x \geq 0$

$$\text{Do đó } P \leq \frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi  $\sqrt{x}+2=2$  hay  $x=0$ .

Vậy GTNN của P là  $\frac{3}{2}$  khi  $x=0$ .

**Bài 7.** Cho biểu thức  $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$  và  $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$  với  $x > 0; x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của P khi  $x=9$ ;
- 2) Rút gọn Q;
- 3) Tìm giá trị của x để  $\frac{P}{Q}$  đạt giá trị nhỏ nhất.

*Hướng dẫn giải*

$$1) \text{ Với } x=9 \text{ (TMĐK) ta được } P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{9+3}{\sqrt{9}-2} = 12$$

2) Với  $x > 0; x \neq 4$  ta có:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x-3\sqrt{x}+2+5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}
 \end{aligned}$$

$$3) \text{ Ta có } \frac{P}{Q} = \left( \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Chúng minh BĐT Cauchy cho hai số thực  $x, y$  không âm  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ .

Ta có:

$$\begin{aligned}
 x + y &\geq 2\sqrt{xy} \\
 (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy} &\geq 0 \\
 (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Ta thấy  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$  với mọi  $x, y > 0$  nên bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi  $x = y$ .

Áp dụng chứng minh trên cho hai số không âm  $\sqrt{x}$  và  $\frac{3}{\sqrt{x}}$  ta có:

$$\frac{P}{Q} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi  $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}}$  hay  $x = 3$  (tmđk)

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $\frac{P}{Q}$  là  $2\sqrt{3}$  khi  $x = 3$ .



**Bài 8.** Cho hai biểu thức  $A = \frac{x-9}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+4}{9-x}$ .

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 4$ ;
- 2) Chứng minh rằng:  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{x-9}$ ;
- 3) Xét biểu thức  $P = AB$ . So sánh  $P^2$  với P.

*Hướng dẫn giải*

1) ĐKXD:  $x > 0; x \neq 9$ .

Với  $x = 4$  (TMĐK) ta được  $A = \frac{x-9}{\sqrt{x}} = \frac{4-9}{\sqrt{4}} = -\frac{5}{2}$

2) Với  $x > 0; x \neq 9$  ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+4}{9-x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+4}{x-9} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}+3) - \sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-9} \end{aligned}$$

3) Ta có  $P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} > 0$  với mọi  $x > 0$ .

Cách 1:

Và  $\sqrt{x}+2 > \sqrt{x}$  với mọi  $x$  do đó  $P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} > 1$

Do đó  $P-1 > 0$  mà  $P > 0$  nên  $P(P-1) > 0$  hay  $P^2 > P$ .

Cách 2: Xét  $P^2 - P = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\right)^2 - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+2)^2 - \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{x} = \frac{(\sqrt{x}+2) \cdot 2}{x}$

Do  $x > 0$  nên  $\sqrt{x} + 2 > 0$  do đó  $\frac{2(\sqrt{x}+2)}{x} > 0$  hay  $P^2 - P > 0$ .

Vậy  $P^2 > P$ .

**Bài 9.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ ;  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{4}{\sqrt{x}-3} + \frac{x-4\sqrt{x}+15}{9-x}$  với

$x > 0; x \neq 9$ .

1) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 25$ ;

2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ ;

3) Cho  $P = A : B$ . Tìm giá trị nguyên lớn nhất của  $x$  để  $|P| + P = 0$ .

*Hướng dẫn giải*

1) Với  $x = 25$  (TMĐK) ta được  $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{25}-1}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

2) Với  $x > 0; x \neq 9$  ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{4}{\sqrt{x}-3} + \frac{x-4\sqrt{x}+15}{9-x} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 4(\sqrt{x}+3) - (x-4\sqrt{x}+15)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{2x - 6\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + 12 - x + 4\sqrt{x} - 15}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

$$3) P = A : B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$$

Ta có:  $|P| + P = 0$  hay  $|P| = -P$  do đó  $P \leq 0$

Bài toán trở thành tìm  $x$  nguyên để  $\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} \leq 0$

Với  $x > 0$  ta có  $\sqrt{x} > 0$  nên để  $\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} \leq 0$  thì  $\sqrt{x}-3 \leq 0$  hay  $x \leq 9$ .

Kết hợp với điều kiện đề bài ta tìm được  $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

Vậy  $x = 8$  là giá trị nguyên lớn nhất của  $x$  để  $|P| + P = 0$ .

**Bài 10.** Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$  và  $B = \frac{5}{\sqrt{x}-2} + \frac{3\sqrt{x}+14}{4-x}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$ .

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 16$ ;
- 2) Rút gọn biểu thức B;
- 3) Xét biểu thức  $P = A.B$ . Tìm tất cả giá trị của  $x$  sao cho  $\sqrt{2P+3} = P$ .

*Hướng dẫn giải*

1) Với  $x = 16$  (TMĐK) ta được  $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{16}+2}{\sqrt{16}-2} = 3$ .

2) Với  $x \geq 0; x \neq 4$  ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{5}{\sqrt{x}-2} + \frac{3\sqrt{x}+14}{4-x} \\ &= \frac{5(\sqrt{x}+2) - (3\sqrt{x}+14)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

$$3) P = A.B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+2} = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$$

Ta có  $\sqrt{2P+3} = P$  (ĐK:  $P \geq 0$ )

TH1: Với  $P = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} = 0$  ( Vô Lý ) nên  $P \neq 0$

TH2: Với  $P > 0$  thì  $\frac{2}{\sqrt{x}-2} > 0$  hay  $\sqrt{x}-2 > 0$  suy ra  $x > 4$

Suy ra :  $\sqrt{2P+3} = P$

$$2P+3 = P^2$$

$$P^2 - 2P - 3 = 0$$

$$\begin{cases} P = -1 \text{ (L)} \\ P = 3 \end{cases}$$

Với  $P = 3$  thì  $x = \frac{64}{9}$  (tmdk)

Vậy  $x = \frac{64}{9}$  thì  $\sqrt{2P+3} = P$ .

**Bài 11.** Cho hai biểu thức  $A = \frac{1}{2+\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}}$  với  $x > 0$ .

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 9$ ;
- 2) Rút gọn B. Tìm các số thực x thỏa mãn  $|2B - 1| = 1 - 2B$ ;
- 3) Tìm x để biểu thức  $\frac{1}{A.B}$  đạt giá trị nhỏ nhất.

*Hướng dẫn giải*

1) Với  $x = 9$  (TMĐK) ta được  $A = \frac{1}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{2+\sqrt{9}} = \frac{1}{5}$ .

2) Với  $x > 0$  ta có:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) + \sqrt{x} - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}
 \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 |2B-1| &= 1-2B \\
 |2B-1| &= -(2B-1)
 \end{aligned}$$

Do đó  $2B-1 \leq 0$  hay  $B \leq \frac{1}{2}$

Bài toán trở thành tìm  $x$  để  $B \leq \frac{1}{2}$

Do đó

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} &\leq \frac{1}{2} \\
 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{2} &\leq 0 \\
 \frac{2\sqrt{x} - (\sqrt{x}+2)}{2(\sqrt{x}+2)} &\leq 0 \\
 \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}+2)} &\leq 0
 \end{aligned}$$

Suy ra  $\sqrt{x}-2 \leq 0$  hay  $x \leq 4$ .

Kết hợp với điều kiện đề bài ta được  $0 < x \leq 4$  thì  $|2B-1| = 1-2B$ .

3) Chứng minh BĐT Cauchy cho hai số thực  $x, y$  không âm  $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ .

Ta có:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy} \geq 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

Ta thấy  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$  với mọi  $x, y > 0$  nên bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi  $x = y$ .

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm  $\sqrt{x}$  và  $\frac{4}{\sqrt{x}}$  ta được:

$$\frac{1}{AB} = \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 4 + \frac{4}{\sqrt{x}} = 4 + \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 4 + 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} = 8$$

Dấu "=" xảy ra khi  $\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}}$  hay  $x = 4$ .

Vậy GTNN của  $\frac{1}{AB}$  là 8 khi  $x = 4$ .

**MATHX**  
THÍCH HỌC TOÁN